THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Comment utiliser les conceptions à propos de l'infini pour introduire la notion de série ?

COCHART, Hélène

Award date:
2015

Awarding institution:
Universite de Namur

UNIVERSITÉ DE NAMUR

Faculté des sciences

COMMENT UTILISER LES CONCEPTIONS À PROPOS DE L'INFINI POUR INTRODUIRE LA NOTION DE SÉRIE ?

Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en « sciences mathématiques à finalité didactique »

Hélène COCHART

Juin 2015

Remerciements

Je tiens à remercier sincèrement Madame Martine De Vleeschouwer, ma directrice de mémoire, pour sa grande disponibilité et son écoute ainsi que pour ses conseils avisés et ses encouragements.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur Joseph Winkin, sans qui je n'aurais pu expérimenter mon ingénierie didactique, pour l'intérêt porté à l'égard de ce travail.

Je souhaite aussi remercier Monsieur Carlo Marchini pour l'aide apportée durant la phase de recherche préalable à ce mémoire.

Je remercie bien entendu les étudiants de première année en mathématique et physique des années académiques 2013-2014 et 2014-2015 pour leur collaboration.

Je n'oublie pas ma soeur, Julie Cochart, à qui j'aimerais exprimer ma reconnaissance pour sa gentillesse à lire et corriger ce travail.

Enfin, je remercie ma mère, ma famille, mes proches et amis pour leur soutien et leurs encouragements tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Résumé

Pour débuter ce mémoire, nous avons observé l'évolution de la conception de l'infini au cours de différents siècles et mis en lumière des obstacles inhérents à cette notion. Par l'intermédiaire d'un questionnaire, nous avons ensuite sondé les physiciens et mathématiciens de première année de l'Université de Namur, année académique 2013 - 2014, afin de connaitre leurs préconceptions sur différentes notions liées à l'infini, telles que les nombres décimaux illimités, les ensembles infinis, les séries, etc. Sur base de leurs réponses, nous avons choisi de nous pencher plus particulièrement sur les séries et de mettre en place une ingénierie didactique sur ce concept. En suivant la description de cette dernière, proposée par Artigue, nous avons conçu une séance de cours permettant de pointer les difficultés rencontrées dans les réponses des étudiants. Enfin, désirant déterminer la pertinence de notre activité, nous avons de nouveau élaboré un questionnaire que nous avons soumis aux mathématiciens et physiciens de première année, de l'année académique 2014 - 2015.

Mots-clés : ingénierie didactique, infini, séries, mathématique.

Abstract

To start this work, we observed the evolution of the concept of infinity in different centuries and highlighted the difficulties inherent to this notion. Through a questionnaire, we then probed first year physicists and mathematicians from the University of Namur in order to know their preconceptions about different concepts related to infinity, such as unlimited decimals, infinite sets , series, etc. Based on their responses, we chose to focus more specifically on the series and set up a didactic engineering on this concept. Following the description of the latter, we designed a course session to point out the difficulties encountered in student responses. Finally, wishing to determine the suitability of our activity, we again prepared a questionnaire we submitted to first year mathematicians and physicists.

Keywords : didactic engineering, infinity, series, mathematics.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Pendant de nombreux siècles, la notion d'*infini* a posé problème au sein de la communauté des mathématiciens. Les erreurs et confusions liées à ce concept sont d'ailleurs monnaie courante lors des leçons de mathématique, dans le chef des étudiants. Illustrons ce propos en nous attardant sur un cas qui nous a été rapporté durant l'élaboration de ce travail : lors d'un cours d'une session propédeutique [1] en mathématique et physique, les étudiants devaient résoudre un système d'équations à deux inconnues (nommons-les x et y). Après développement, un étudiant a obtenu l'équation suivante :

$$0x = 0$$

Il a ensuite écrit $x = \infty$ pour signifier qu'il y avait existence d'une infinité de solutions. Il y a une confusion entre la syntaxe et la sémantique. D'autres erreurs liées à la notion d'infini ont été relevées : dans le cadre d'un exercice portant sur la soustraction de nombres décimaux illimités, un étudiant a affirmé que ce type d'opération était indéterminé. Ainsi, à la question « Quel est le résultat de $1,999\overline{9} - 0,888\overline{8}$? » [2], sa réponse fut

$$1,999\overline{9} - 0,888\overline{8} = \infty - \infty \qquad \textit{indéterminé}$$

Comment expliquer que l'étudiant tire cette conclusion (*indétermination*) ? Tout d'abord, nous supposons un amalgame entre les nombres décimaux illimités, qui comprennent une infinité de décimales, et l'*infini* en lui-même. De nouveau, il y a donc une confusion entre la syntaxe et la sémantique. De plus son raisonnement laisse penser qu'il a agi comme s'il se situait dans le chapitre des limites. Cet élément peut expliquer qu'il affirme que l'infini moins l'infini constitue une indétermination.

Ces différentes situations justifient l'intérêt didactique suscité par la notion d'infini. Ce concept est implicitement lié à différentes matières abordées lors d'un cours de mathématique telles que les décimaux illimités, les limites de fonctions ou de suites, les séries, etc.

L'objectif de ce mémoire est, dans un premier temps, de mettre en lumière les difficultés inhérentes à ces thèmes et plus particulièrement à celui des séries, et, dans un deuxième temps, d'exploiter nos observations afin de concevoir une activité introduisant cette notion

1. Une session propédeutique est une période d'enseignements organisée à l'Université de Namur, qui vise à préparer l'étudiant pour de futurs enseignements et à faciliter l'apprentissage.
2. Nous avons personnellement choisi ces décimales pour l'illustration de ce cas. La notation $1,999\cdots$ avait été utilisée à la place de la notation $1,999\overline{9}$.

aux étudiants de première année en mathématique ou physique de l'Université de Namur.

La méthode choisie pour y parvenir, et structurer notre travail, est l'*ingénierie didactique* proposée par Artigue (1989). Cette dernière se divise en quatre phases qui font l'objet d'une présentation théorique à la suite de notre introduction. Etant assez conséquentes, nous décidons de scinder ce mémoire en deux parties : la première reprend la première phase de l'ingénierie concernant les analyses préalables, tandis que la seconde décrit les trois autres phases, à savoir, la conception de notre activité, son expérimentation et enfin son évaluation.

Ainsi, nous débutons ce travail en développant les analyses préalables. Réparties en quatre étapes, celles-ci fragmentent notre première partie en trois chapitres distincts.

Le premier, à caractère épistémologique, permet d'étudier le cheminement de l'*infini* ainsi que les difficultés éprouvées initialement quant à sa manipulation et quant à certaines notions mathématiques y afférant.

Il est également essentiel de porter un regard sur la perception qu'ont les étudiants de ces mêmes concepts à l'heure actuelle et de mettre en lumière les obstacles rencontrés à ce propos. Ainsi, le deuxième chapitre de la première partie propose un questionnaire que nous avons conçu dans le but de dégager les difficultés éprouvées par les étudiants dans l'étude de ces thèmes, et plus particulièrement celui des séries. Comme nous le verrons, nous nous baserons sur ces dernières pour élaborer des pistes d'amélioration de l'enseignement des séries que nous mettrons en pratique. Ce chapitre dégage également d'autres domaines d'investigation potentiels.

Le troisième chapitre, quant à lui, permet de porter un regard sur l'enseignement actuel des séries en premier baccalauréat mathématique et physique, ses effets ainsi que les contraintes institutionnelles se dressant devant nous pour concevoir notre activité.

Une fois ces analyses préalables effectuées, nous passons à la deuxième partie du travail. Le premier chapitre de cette nouvelle partie décrit et justifie l'activité que nous avons élaborée. Son objectif est de proposer des situations permettant de faire ressortir des conceptions sur les séries de manière à invalider les préconceptions erronées. Cette activité se base sur les difficultés éprouvées par les étudiants à l'égard des séries, difficultés ayant été relevées dans la première partie de ce travail.

Le deuxième chapitre de la deuxième partie relate, quant à lui, l'expérimentation de notre activité auprès d'un public de première année en physique ou mathématique. Nous mettons en exergue les difficultés constatées et des solutions à ces obstacles.

Dans le dernier chapitre de cette partie, nous analysons les réponses fournies par les étudiants de première année à un questionnaire élaboré afin de déterminer le bilan de la séance de cours. Nous tentons également de dégager des pistes d'amélioration à apporter en vue de réitérer l'expérience.

Chapitre 2

Méthodologie : Ingénierie didactique

Dans l'objectif de développer une activité portant sur un concept mathématique sous-tendant la notion d'infini, nous précisons la notion d'ingénierie didactique que nous prendrons en considération lors de ce travail. Pour la rédaction de ce chapitre, nous nous basons principalement sur les écrits d'Artigue (1988 et 2009) ainsi que de Brousseau & Brousseau (2006).

Définition de l'ingénierie didactique

Brousseau & Brousseau (2006, p. 5) désignent l'ingénierie didactique comme *l'étude d'un projet d'enseignement sous ses aspects didactiques, techniques, économiques, financiers et sociaux . . . et qui nécessite un travail de synthèse coordonnant des travaux de diverses équipes de spécialistes .*

Pour eux, l'ingénierie didactique consiste au sens strict (2006, p. 7) :

- *en la* ***conception*** *et en la* ***réalisation*** *de tout ou partie de curriculums : une suite de leçons, une leçon, un assortiment d'exercices, un manuel, un programme informatique etc.*
- *cette conception est accompagnée de* ***l'étude*** *des diverses possibilités entre lesquelles il est fait un choix, et de* ***l'explicitation*** *des raisons de ces choix (techniques, scientifiques, et autres).*

Ils distinguent également l'ingénierie didactique au sens large (2006, p. 8) :

> *Mais en un sens plus large, on peut y admettre la simple production d'un curriculum – sans ses justifications précises – et, par conséquent aussi sa conduite, dans la mesure où tout curriculum laisse nécessairement un certain champ de décisions didactiques à l'enseignant qui l'utilise.*

Ainsi, l'ingénierie didactique au sens large consiste en la conception et en la production d'un curriculum ou d'une de ses parties (une leçon, un manuel, un ensemble d'exercices, . . .) sans y introduire de justification des choix didactiques effectués. D'autres auteurs ont également travaillé sur cette notion, notamment Artigue qui en donne cette définition (1988, pp. 285-286) :

> *L'ingénierie didactique, vue comme méthodologie de recherche, se caractérise en premier lieu par un schéma expérimental basé sur des « réalisations didactiques » en classes, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement.*

L'ingénierie didactique peut dès lors être envisagée comme une méthodologie de recherche impliquant la conception et l'analyse de séquences de cours.

S'adaptant mieux au besoin de notre analyse, nous avons décidé de nous baser sur la conception proposée par Artigue. Notons que cette dernière date de 1989 et que vingt ans plus tard, l'auteur s'est fixé pour objectif de rechercher une *refondation* pour l'ingénierie didactique (Artigue, 2009). Dans cet essai, elle met en évidence que les besoins de 2009 sont tout autres que ceux de 1989 (2009, p. 226) et tente *de mesurer à quel point cette notion d'ingénierie didactique a évolué et d'en comprendre les raisons* (2009, p. 236). Sa volonté est de déterminer les éléments à conserver dans l'effort d'une refondation mais aussi les adaptations à apporter. Cependant, comme le souligne Artigue (2009, p. 237), ce travail est loin d'être achevé, c'est pourquoi nous décidons de nous en tenir à la définition donnée par l'auteur en 1989. Ainsi, nous utiliserons les quatre phases de l'ingénierie proposée par Artigue en 1989 comme méthodologie à notre travail. Ces quatre phases sont :

- les analyses préalables,
- la conception et l'analyse a priori des situations didactiques de l'ingénierie,
- l'expérimentation,
- les analyses a posteriori et l'évaluation.

Le but de notre travail étant de développer une ingénierie didactique portant sur un concept mathématique sous-tendant la notion d'infini, il est important de s'attarder sur ces différentes phases. La première, *analyses préalables*, fera l'objet d'une partie de ce travail. Les trois autres en constitueront la seconde.

2.1 Les analyses préalables

Les analyses préalables sont, selon Artigue, *destinées à faire émerger les connaissances liées au domaine étudié, afin de préparer la phase de conception qui suivra, et prennent en compte les objectifs spécifiques de la recherche* (1988, p. 287). L'objectif de cette phase est de nous préparer à la seconde, à savoir, la conception d'une séance de cours. Pour se faire, Artigue propose quatre étapes :

- l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement,
- l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et obstacles rencontrés,
- l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets,
- l'analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation.

L'étude de ces points nous permettra d'entrevoir les obstacles rencontrés avant que certaines notions liées à l'infini arrivent dans le savoir savant. Nous verrons également si les étudiants actuels éprouvent encore les mêmes difficultés, et dégagerons un thème à traiter dans notre séance de cours : les séries.

2.2 La conception et l'analyse a priori

Dans cette deuxième phase de l'ingénierie didactique proposée par Artigue (1988), le chercheur *prend la décision d'agir sur un certain nombre de variables*, appelées **variables de commande**. Elles peuvent être distinguées en deux groupes (Artigue, 1988, p. 291) :

1. Les variables macro-didactiques ou globales, qui concernent l'organisation globale de l'ingénierie (*Les variables didactiques*, p. 3) :
   - type de cours ou d'activité (cours magistral, TD, enseignement par activité,. . .),
   - contrat entre le maître et l'élève (ce que l'enseignant attend des étudiants),
   - type d'évaluation (évaluation formative, sommative,. . .).
2. Les variables micro-didactiques ou locales, qui concernent l'organisation locale de l'ingénierie (*Les variables didactiques*, p. 3) :
   - organisation de la séance :
     - discours de l'enseignant (présentation de la séance, de l'activité et de ses buts),
     - travail sur des connaissances acquises ou nouvelles,
     - découpage de la séance (travail individuel, en groupe)
   - caractéristiques de la tâche (information à traiter, outils et matériel disponibles, présentation de la tâche).

L'analyse a priori a pour objectif de *déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens* (Artigue, 1988, p. 294). Autrement dit, la sélection de variables de commande influencera l'attitude des étudiants lors de la séquence de cours. L'objectif de cette partie sera dès lors de mener d'une part une analyse descriptive ayant pour but d'expliciter chacune de nos variables et les raisons ayant présidé à leur choix, et d'autre part, une analyse prédictive du comportement des étudiants.

De plus, cette analyse a priori est *centrée sur les caractéristiques d'une situation a-didactique*. Une situation a-didactique est *la part d'une situation didactique* (situation servant à enseigner) *dans laquelle l'intention d'enseigner n'est pas explicite au regard des élèves* (Brousseau, *Situation adidactique*, p. 1). Comme le dit également G. Sensevy (cité par Henry, 2014) :

> *Dans des situations a-didactiques, les interactions des élèves avec le milieu sont supposées suffisamment prégnantes et adéquates pour qu'ils puissent construire des connaissances, formuler des stratégies d'action, valider des savoirs en utilisant les rétroactions de ces milieux sans que leur activité ne soit orientée par la nécessité de satisfaire aux intentions supposées du professeur.*

En d'autres termes, une situation est a-didactique lorsque l'enseignant laisse à l'étudiant la responsabilité d'apprendre par lui-même un nouveau savoir. Ainsi, ils entrent dans la phase de dévolution que Brousseau (*Situation adidactique*, p. 1) définit comme étant

> *l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert.*

L'enseignant ne peut cependant rester en retrait de cette relation élève-savoir et doit reprendre la main pour effectuer un tri dans ce qui a émergé de la situation a-didactique, l'objectif étant de faire apparaitre les conceptions erronées des apprenants afin de dégager des outils adaptés à leur correction. La réintroduction du professeur dans le processus est ce qu'on appelle la phase d'institutionnalisation. Formellement, Bousseau (*Situation adidactique*, p. 2) en parle de la manière suivante :

> *La prise en compte « officielle » par l'élève de l'objet de la connaissance, et par le maître, de l'apprentissage de l'élève, est un phénomène social très important et une phase essentielle du processus didactique : cette double reconnaissance est l'objet de l'institutionnalisation.*

Dans le chapitre intitulé *Conception et analyse a priori* de la deuxième partie de ce travail, nous décrivons, d'une part, l'activité élaborée afin d'introduire la notion de séries, et d'autre part, nous imaginons certaines conceptions erronées que les étudiants pourraient avoir et proposons des contre-exemples pour les invalider.

2.3 L'expérimentation

Cette troisième phase consiste à récolter les données relatives à notre recherche. Il s'agit donc, d'observer comment s'est déroulée notre séquence de cours et d'en tirer les informations pertinentes. La description de l'expérience se situe dans la seconde partie de ce travail (cfr chapitre *Expérimentation*).

2.4 L'analyse a posteriori et l'évaluation

Pour Artigue (1988, p. 297), l'analyse a posteriori *s'appuie sur l'ensemble des données recueillies lors de l'expérimentation : observations réalisées des séances d'enseignement, mais aussi productions des élèves en classe.* Dans notre cas, nous rapportons les éléments pertinents de nos échanges avec les étudiants lors du déroulement de la leçon. Nous observons également les conclusions que ces derniers ont tiré de cet enseignement.

L'évaluation du dispositif d'enseignement quant à elle *se fonde sur la confrontation de l'analyse a priori et posteriori* (Artigue, 1988, p. 297). Il nous faut donc comparer les résultats obtenus lors de l'expérimentation avec ceux que nous supposons obtenir au départ.

Ces différents points seront développés dans le chapitre *Analyse a posteriori et évaluation* se situant dans la seconde partie de ce travail.

Première partie

Analyses préalables

Chapitre I - 1

Analyse à caractère épistémologique des contenus visés par l'enseignement

Ce chapitre permet de développer le premier point des analyses préalables, qui, rappelons-le, constituent la première phase de l'ingénierie didactique proposée par Artigue : l'analyse à caractère épistémologique des contenus visés par l'enseignement.

Selon Duplessis (2007, p. 10), la dimension épistémologique d'un savoir scientifique consiste à *déterminer quel cheminement ils* (les savoirs) *ont suivi et quels obstacles ils ont rencontrés et surmontés* . En parcourant différentes périodes de l'histoire, ce chapitre permet de comprendre comment des notions liées à l'infini ont émergé dans le savoir mathématique et quels sont les obstacles rencontrés avant qu'elles ne trouvent leur place dans le savoir savant.

De plus, ce chapitre présente les deux types d'infini communément admis à l'heure actuelle, à savoir, l'infini potentiel et l'infini réel (également appelé infini actuel) ainsi que leur intégration dans le savoir savant. Pour la rédaction de ce chapitre, nous nous basons principalement sur les écrits de Barrow (2008), Baudet (2002), S. Thiry (2008-2009) et Zeroallazero (2009).

I - 1.1 L'Antiquité

Au 4ème siècle avant JC, en Grèce antique, les hommes se focalisent sur les objets extrêmement petits au détriment de ceux de grandes tailles, selon eux, moins facile à appréhender (Barrow, 2008, pp. 26, 27). Pour illustrer ces propos, imaginons qu'on souhaite couper une barre de fer en deux, puis encore en deux et ainsi de suite jusqu'à obtenir un élément à peine perceptible. On se rend compte que la réalité physique ne nous permet pas d'arriver à un tel résultat. En effet, pour que cette barre soit divisée en deux à chaque étape, il faudrait, par exemple, que la taille du couteau utilisé pour effectuer ces différentes divisions soit elle aussi de plus en plus petite. Et pourtant, ces obstacles physiques semblent surmontables pour les hommes de cette époque. En effet, ceux-ci imaginent plus facilement comment passer au-dessus de ces difficultés physiques et donc, sont plus enclin à travailler avec des éléments de petites tailles. Mais très vite, à cause de différents paradoxes, ils rejettent l'idée de travailler avec ceux-ci.

Dans le but de nier le mouvement, le philosophe grec Zénon d'Elée (480 av JC - 420 av JC) propose un paradoxe connu sous le nom de paradoxe de la flèche et la cible. Il imagine un raisonnement dans lequel une flèche, tirée par un arc, ne peut jamais atteindre sa cible, ce qui, physiquement, est évidemment impossible. Le raisonnement menant au paradoxe est le suivant : avant d'atteindre sa cible, la flèche doit parcourir la moitié de la distance entre son point de départ et la cible. Appelons ce point milieu M. Cependant, pour arriver au point M, la flèche doit également parcourir la moitié de la distance qui sépare ce point de l'endroit de départ. En répétant ce processus aussi longtemps qu'on le souhaite, on arrive à la conclusion que la flèche ne peut atteindre sa cible ce qui est en réalité impossible.

Remarquons qu'à cette époque le concept d'infini n'a pas encore émergé. Cependant, le fait de répéter le processus « aussi longtemps qu'on le souhaite » sous-entend cette notion.

Un autre paradoxe de Zénon à ce sujet est celui d'Achille et la tortue : alors qu'Achille et une tortue doivent disputer une course, il décide, certain de sa victoire, de laisser une certaine avance à sa concurrente. Supposons que les deux adversaires courent à vitesse constante (Achille très rapidement, la tortue très lentement). Lorsqu'Achille débute sa course, la tortue, ayant pris de l'avance, se trouve déjà à une certaine distance (au point A) du point de départ. Sur le temps qu'Achille met pour atteindre ce point A, la tortue aura parcouru une certaine distance, certes beaucoup plus courte, mais non nulle, qui lui permettra d'arriver au point B. Un temps supplémentaire sera dès lors nécessaire à Achille pour arriver à ce nouveau point, temps pendant lequel la tortue aura avancé. En continuant ainsi, on constate que même en courant aussi longtemps qu'il le désire, Achille ne peut rattraper la tortue.

Au vu de ces paradoxes, les Grecs rejetèrent l'idée de travailler avec l'infini. La cause de ce rejet n'est pas l'idée-même de continuer un processus aussi longtemps que désiré mais bien le résultat obtenu par un tel processus. Ces paradoxes mettent en lumière le danger que représente, pour les mathématiciens de l'époque, la notion d'infini, en ce qu'elle remet en cause ce qu'ils prennent pour vérité. Malgré cela, Aristote (384 av JC - 322 av JC), décide de l'aborder et en conclut que (cité par Barrow, 2008, p. 40)

L'infini a une existence potentielle... Il n'y aura pas un infini réel.

Pour Aristote, l'infini potentiel est généré par un processus sans fin temporelle. Autrement dit, on retrouve l'idée d'infini potentiel derrière la répétition d'une action « aussi longtemps que souhaité », ou encore « autant de fois que désiré ». Ce processus peut mener d'une part vers des choses très grandes et d'autre part vers des choses très petites. Momentanément, nous nommerons ces choses très petites (respectivement très grandes) comme étant infiniment petites (respectivement infiniment grandes). Pour illustrer cet infini potentiel menant vers quelque chose d'infiniment petit, nous pouvons reprendre l'exemple de la barre coupée en deux à répétition. En appliquant ce processus, on arrive à quelque chose d'infiniment petit. Un exemple d'infini potentiel menant à quelque chose d'infiniment grand serait d'additionner tous les nombres naturels. Après un tel processus, on arrivera en effet à quelque chose de très grand. Nous constatons que l'infini potentiel est donc concevable pour Aristote.

Cependant, en témoigne la citation susmentionnée, Aristote ne considère pas la deuxième conception de l'infini, à savoir l'infini réel. Selon lui, il est employé pour parler d'objets qui peuvent réellement être infinis, ce qui pour lui est inconcevable. D'ailleurs, selon Philippe Etchecopar (*L'infini en mathématique*, p. 3) *pour la plupart des philosophes et mathématiciens qui lui succéderont jusqu'au XVIIe siècle, ce concept ne peut exister dans notre univers.*

Ainsi la notion d'infini potentiel domine dans les esprits des mathématiciens, qui refusent de croire que des objets peuvent être infinis, et par là, ne considèrent pas l'infini réel. C'est pourquoi, jusqu'aux découvertes de Cantor (1845 - 1918), le concept d'infini sous-entend la notion d'infini potentiel.

I - 1.2 Le Moyen-Age

L'idée de séquence sans fin est à nouveau mentionnée au Moyen-Age, vers 500, par le philosophe Boèce (470 - 524) lorsqu'il introduit la notion de progression. Sur base des idées de celui-ci, Nicole Oresme (1323 - 1382) présente le concept de somme sans fin en vue de résoudre le paradoxe de Zénon (Baudet, 2002, p. 94). Cette nouvelle notion sous-entend le concept d'infini potentiel introduit par Aristote. En effet, puisque l'idée est d'additionner des termes les uns à la suite des autres en continu, on est en présence d'un processus sans fin temporelle.

Oresme s'est penché plus particulièrement sur la somme suivante

$$S_0 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

pour tenter d'expliquer le paradoxe de Zénon. Résumons l'idée d'Oresme comme suit (Baudet, 2002, p. 94) : en montrant que la somme infinie S_0 donne un nombre fini compris entre zéro et l'infini, on peut expliquer le paradoxe de la flèche et la cible de Zénon.

Oresme constate que la série S_0 est une addition de termes qui deviennent de plus en plus petits. Notons que cette idée sous-entend clairement l'infini potentiel, mais de deux façons différentes : d'une part, on trouve un infini potentiel menant vers quelque chose d'infiniment grand, des termes étant sans cesse ajoutés. D'autre par, on a un infini potentiel menant à quelque chose d'infiniment petit, les termes ajoutés devenant de plus en plus insignifiants. Un processus sans fin temporelle est sous-entendu dans les deux cas. Dans l'un, il mène vers quelque chose d'infiniment grand et dans l'autre, vers quelque chose d'infiniment petit. Ainsi, pour prétendre que S_0 est une somme infinie qui engendre un nombre fini, l'idée est d'affirmer que les deux infinis précédemment cités se compensent.

Un tel raisonnement laisse à penser que le paradoxe de la flèche et la cible de Zénon peut être expliqué. En effet, pour atteindre sa cible, la flèche doit parcourir de plus en plus de distances qui deviennent au fur et à mesure infiniment petites. C'est pourquoi, montrer que la somme sans fin S_0 engendre un nombre fini revient à montrer que la distance parcourue par la flèche atteint sa cible. Cependant, Oresme a lui-même montré que S_0 n'amenait pas à un tel résultat. N'expliquant pas le paradoxe de Zénon, la notion de somme infinie fut mise de côté pendant un temps.

Remarquons qu'à cette époque, le symbole ∞, et le symbolisme ne manière général, n'a pas encore fait son apparition. La somme infini S_0 (que nous appelons *série* à l'heure actuelle) ne peut donc pas encore s'écrire sous la forme que nous connaissons aujourd'hui, à savoir :

$$S_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

I - 1.3 Les Temps Modernes

Durant le début de la période des Temps Modernes (1492 - 1789), les mathématiciens développent l'algèbre, se consacrant ainsi moins aux notions liées à l'infini. Dans le courant du 17^{e} siècle cependant, ils vont de nouveau manipuler l'infini.

En effet, ce $17^{\text{ème}}$ siècle est tout d'abord marqué par l'émergence du symbole ∞. A cette époque, le nombre 1000, désigné par la lettre M par les Romains, est considéré comme un nombre très élevé. Le symbole ∞ est en réalité une adaptation de John Wallis (1616 - 1703) qui remarque que lorsque la lettre M est écrite rapidement, elle se transforme en ∞ (Barrow, 2008, p. 18). Wallis n'en reste pas là en ce qui concerne l'infini : lui et James Grégory (1638 - 1675) repensent les sommes sans fin introduites par Oresme durant le Moyen-Age (Baudet, 2002, p. 132).

A côté de cela, d'autres mathématiciens travaillent sur la résolution des deux problèmes suivants (Baudet, 2002, pp. 135-137) :

1) la quadrature d'une surface donnée, [1]
2) la recherche de l'écriture de l'équation de la tangente en un point donné d'une courbe.

En réalité, ces deux problèmes sont liés et permettent de mettre en avant les concepts de dérivée et d'intégrale par le biais des infinitésimaux. Deux mathématiciens ont longuement travaillé à faire émerger cette nouvelle notion : Newton (1643 - 1727) et Leibniz (1646 - 1716). Etant donné que Newton aborde ce concept d'un point de vue très physicien, nous ne présenterons que les idées de Leibniz. Selon G. Zeroallazero (2009, p. 29) :

> *Leibniz « suggère » que les quantités infinitésimales sont inférieures à toute quantité donnée, qu'elles sont des quantités privées de grandeur* [...].

Grâce aux infinitésimaux, Leibniz parvient à dégager la notion de dérivée à partir du problème de la tangente, ce qui permit par la suite de résoudre le problème de la quadrature. Dans ce qui précède, nous n'avons perçu que l'idée d'infini potentiel dans les concepts mathématiques, comme dans la notion de somme infinie. Au travers des notations de Leibniz, on entrevoit l'idée de l'infini actuel. En effet, il considère les infinitésimaux comme des éléments infiniment petits.

Bien que l'utilisation des infinitésimaux ait permis d'expliquer des paradoxes du passé, une partie de la communauté mathématique ne les acceptera pas avant le $20^{\text{ème}}$ siècle (Abdellaoui, *Calcul Infinitésimal*) et continuera de trouver inconcevable d'utiliser certaines

1. La quadrature d'une surface est la recherche d'un carré ayant même aire que la surface en question.

notions liées à l'infini.

Au 18[ème] siècle (1703), la théorie sur les sommes sans fin, sous-entendant l'idée d'infini potentiel, connait une nouvelle évolution grâce au travail de Guido Grandi (1671 - 1742). Ses recherches décrites ci-après (Barrow, 2008, pp. 76, 77) vont à nouveau remettre en cause certaines croyances de mathématiciens à propos de l'infini. Afin d'expliquer la difficulté pour ce concept d'intégrer le savoir savant, considérerons la somme infinie suivante :

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Pour obtenir le résultat de cette somme, trois possibilités s'offrent à nous. La première est de regrouper les termes par paires à partir du première terme, comme nous le montre cette égalité :

$$S_1 = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

La deuxième possibilité est de regrouper les termes de cette série par paires à partir du deuxième terme :

$$S_2 = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

Enfin, la dernière possibilité est de placer les parenthèses de sorte que

$$\begin{aligned} S_3 &= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) \\ &= 1 - S_3 \\ 2S_3 &= 1 \\ S_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dès lors, les trois possibilités de réponse pour le calcul de S sont :

- $S = S_1 = 0$,
- $S = S_2 = 1$,
- $S = S_3 = \frac{1}{2}$,

signifiant que $S = 0 = 1 = \frac{1}{2}$, ce qui est impossible.

Dans le cas de sommes finies par contre, les valeurs de S sont distinctes selon les cas. En effet, S vaudra zéro s'il y a un nombre pair de termes alors qu'il vaudra un s'il y en a un nombre impair. Puisque dans le cas des sommes infinies aucune distinction n'est possible, les mathématiciens vont de nouveau mettre de côté pour un temps l'infini potentiel que sous-entend la notion de somme sans fin.

A la même époque pourtant, deux mathématiciens très célèbres, Brook Taylor (1685 - 1731) et Colin Mac Laurin (1698 - 1746), ne rejetèrent pas la notion de sommes infinies. L'idée de base de Taylor est d'approximer une fonction donnée (f) dépendante d'une certaine variable (x) dans le voisinage d'une valeur donnée (a) par une suite de polynômes en cette variable. Pour avoir la meilleure estimation possible, Taylor considère un polynôme de degré infini (Hubaut, 2014). Ainsi, on constate qu'il est possible de passer du domaine des séries à celui des dérivées et ce, via la formule qui suit.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \ldots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} + \ldots \quad .$$

Mac Laurin quant à lui démontre le même procédé que Taylor à ceci près qu'il fixe la valeur de la constante a à 0. Dès lors, la formule de Taylor peut se réécrire sous la forme suivante :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)(x)}{1!} + \frac{f''(0)(x)^2}{2!} + \frac{f'''(0)(x)^3}{3!} + \ldots + \frac{f^n(0)(x)^n}{n!} + \ldots \qquad .$$

Grâce à leurs découvertes, à savoir, le lien entre les séries et les dérivées, une partie des mathématiciens envisagent l'utilisation de ces notions liées à l'infini potentiel.

I - 1.4 L'Epoque Contemporaine

Comme susmentionné, les mathématiciens du $18^{\text{ème}}$ siècle sont enclin à intégrer l'infini potentiel dans leur travaux, ce qui ne vaut pas encore pour l'*infini réel* (également appelé *infini actuel*). A partir du $19^{\text{ème}}$ siècle cependant, et surtout grâce à Georg Cantor (1845 - 1918), ce type d'infini put être clarifié. Par son travail, Cantor répond aux difficultés éprouvées par ses prédécesseurs. Grâce à lui, l'infini ne sera plus seulement potentiel, mais il sera également actuel : l'infini peut être arithmétisé.

Pour construire sa théorie sur l'infini actuel, Cantor se sert de travaux déjà réalisés et plus particulièrement, il se base sur le paradoxe de Galilée (1564 - 1642) que nous exposons ici, relaté par Barrow (2008, pp. 68, 69) :

> Sagredo : *Vous savez parfaitement, je suppose, quels nombres sont carrés et quels nombres ne le sont pas.*
> Simplicio : *Je sais parfaitement qu'un nombre carré provient de la multiplication d'un autre nombre par lui-même ; ainsi quatre, neuf, etc., sont des nombres carrés résultant de la multiplication de deux, trois, etc., par eux-mêmes.*
> Salviati : *Fort bien ; et-vous savez aussi que comme les produits sont appelés carrés, les facteurs, c'est-à-dire les termes que l'on multiplie, sont appelés côtés ou racines ; quant aux autres nombres qui ne proviennent pas de nombres multipliés par eux-mêmes, ce ne sont pas des carrés. Par conséquent si je dis que les nombres pris dans leur totalité, en incluant les carrés et les non-carrés, sont plus nombreux que les carrés seuls, j'énoncerai , n'est-ce pas, une proposition vraie ?*
> Simplicio : *Très certainement.*
> Salviati : *Si je demande maintenant combien il y a de nombres carrés, on peut répondre, sans se tromper, qu'il y en a autant que de racines correspondantes, attendu que tout carré a sa racine et toute racine son carré, qu'un carré n'a pas plus d'une racine, et une racine pas plus d'un carré.*
> Simplicio : *Exactement.*
> Salviari : *Mais si je demande combien il y a de racines, on ne peut nier qu'il y en a autant que de nombres, puisque tout nombre est la racine de quelque carré ; cela étant, il faudra donc dire qu'il y a autant de nombres carrés qu'il y a de nombres, puisqu'il y en a autant que de racines, et que les racines représentent l'ensemble des nombres.*

Autrement dit, Galilée sous-entend que chaque nombre entier peut être mis en correspondance avec son carré comme illustré par le tableau qui suit. Celui-ci nous permet de constater que nous avons affaire à deux listes infinies.

TABLE I - 1.1 – Correspondance entre les nombres entiers et leurs carrés.

Nombre entier	->	Carré
1	->	1
2	->	4
3	->	9
4	->	16
5	->	25
6	->	36
7	->	49
8	->	64
9	->	81
10	->	100
...	->	...

A présent, reprenons le dialogue de Galilée :

> Salviari : *Et pourtant nous disions au début qu'il y a beaucoup plus de nombres que de carrés, étant donné que la plus grande partie des nombres ne sont pas des carrés. À quoi s'ajoute le fait que la proportion des carrés diminue toujours davantage quand on passe à des nombres plus élevés : si en effet jusqu'à cent il existe dix carrés, c'est-à-dire la dixième partie de tous les nombres, jusqu'à dix mille, un centième seulement des nombres sont des carrés, et jusqu'à un million, la millième partie seulement; pourtant, dans un nombre infiniment grand, il faudrait admettre que les carrés sont aussi nombreux que tous les nombres pris ensemble.*
> Sagredo : *Qu'en conclure dans ces conditions ?*
> Salviati : *À mes yeux la seule issue possible est de dire que l'ensemble des nombres est infini, que le nombre des carrés est infini, et le nombre de leurs racines pareillement; que le total des nombres carrés n'est pas inférieur à l'ensemble des nombres, ni celui-ci supérieur à celui-là, et, finalement, que les attributs « égal », « plus grand » et « plus petit » n'ont pas de sens pour les quantités infinies, mais seulement pour les quantités finies.* [...] *Voilà pour la première difficulté.*

Comme le met en lumière ce discours, Galilée est convaincu que les deux listes contiennent une infinité d'éléments. Cependant, il constate que ceux de la colonne de droite – les carrés des nombres entiers naturels – se retrouvent dans la colonne de gauche, celle des entiers naturels eux-mêmes. Galilée conclut donc à un paradoxe puisque d'une part, il affirme qu'il y a autant de nombres entiers naturels que de nombres carrés et d'autre part, il sait que l'ensemble des nombres carrés est strictement compris dans l'ensemble des nombres naturels. De ce paradoxe, dit *de réflexivité*, l'auteur tire la conclusion que les attributs « égal », « plus grand » et « plus petit » n'ont pas de sens pour les ensembles infinies (cité par Thiry, 2008-2009, p. 158).

Sur base des mêmes faits, Cantor tire d'autres conclusions, et affirme que les ensembles sont des objets ayant *une existence en soi indépendamment de nos moyens de l'atteindre* ([**?**]) et que seul le contenu les définit. En effet, il considère que le tout (dans l'exemple, les naturels), n'est pas plus grand qu'une de ses parties (dans l'exemple, l'ensemble des carrés parfaits), mais qu'ils ont le « même nombre d'éléments » (dans l'exemple, une infinité). Pour éviter toute confusion, Cantor parle de *cardinalité* plutôt que de *nombre d'éléments* ou de *taille* (cité par Thiry, 2008-2009, p. 158). Il définit cette nouvelle notion de la manière qui suit (Cantor, 1878, p. 30) :

> *Nous appelons « puissance » ou « nombre cardinal » de M le concept général qui, à l'aide de notre faculté active de pensée, résulte de l'ensemble M quand nous faisons abstraction de la nature de ses différents éléments m et de l'ordre dans lequel ils sont donnés.*

A partir de là, Cantor définit [2] ce qu'est un ensemble infini et un ensemble infini dénombrable.

Définition 1. *Un ensemble E est dit infini si et seulement si il existe une bijection de E sur une partie stricte de lui-même.*

Définition 2. *Un ensemble est dit infini dénombrable si et seulement si ses éléments peuvent être mis en bijection avec les entiers naturels.*

On peut dès lors se demander quel est le lien entre les ensembles infinis dénombrables et leur cardinalité. Pour Cantor (1895, p. 282), il est le suivant :

> *Si on peut faire correspondre élément par élément deux ensembles bien définis M et N par une opération à sens unique* [autrement dit, si une bijection entre M et N existe] *(et quand on peut le faire d'une manière, on peut le faire aussi de beaucoup d'autres), convenons pour la suite de nous exprimer en disant que ces ensembles ont la même puissance (donc de même cardinalité) ou encore qu'ils sont équivalents.*

Ainsi, il en déduit la propriété :

Propriété 1. *Deux ensembles E et F sont équipotents, ou possèdent le même cardinal, si et seulement si il existe une bijection de E sur F.*

Grâce à celle-ci, Cantor tire la conclusion que tous les ensembles infinis dénombrables ont la même cardinalité. En effet, chaque ensemble infini dénombrable est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{N}$ (par la définition 2) et a dès lors la même cardinalité que cet ensemble $\mathbb{N}$ (par la propriété 1). Ceci implique que tous les ensembles infinis dénombrables sont de

2. Toutes les définitions et propriétés du reste de cette section ont été tirées des références [18] et [26].

même cardinalité. Poussons ce raisonnement encore plus loin grâce à une autre définition introduite par Cantor :

Définition 3. *L'ensemble des entiers naturels* $\mathbb{N}$ *est de cardinalité* $\mathcal{N}_0$.

Nous en concluons de cette dernière définition qu'un ensemble infini dénombrable est de cardinalité $\mathcal{N}_0$. Nous nous servirons de l'ensemble $\mathbb{N}$ comme ensemble de référence (cité par Thiry, 2008-2009, p. 158) pour déterminer si un ensemble a une telle cardinalité. On dira qu'un ensemble E est de nombre cardinal $\mathcal{N}_0$ si et seulement si E est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Il est évident que l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est lui-même un ensemble infini dénombrable puisqu'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$. Etant donné que cet ensemble contient une infinité d'éléments, non concluons, par la propriété 1 et la définition 6 énoncées ci-dessus, que les ensembles infinis dénombrables ont tous une infinité d'éléments.

En reprenant l'exemple de la TABLE I - 1.1 et la définition 6, nous pouvons affirmer que l'ensemble des carrés des nombres naturels est un ensemble infini dénombrable puisqu'il peut être mis en bijection avec les entiers naturels. Ainsi, par la propriété 1, cet ensemble comporte une infinité d'éléments tout comme l'ensemble $\mathbb{N}$.

Il existe d'autres ensembles infinis dénombrables. Citons notamment l'ensemble des nombres pairs ou encore celui des nombres impairs. Cantor montre également que les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des ensembles infinis dénombrables. Il ne peut tirer cette conclusion pour l'ensemble $\mathbb{R}$ et découvre ainsi que tous les ensembles infinis n'ont pas la même cardinalité (Leroy, *Théorie des ensembles : Introduction*).

Pour le montrer, Cantor suppose par l'absurde qu'il existe une bijection entre l'ensemble des naturels $\mathbb{N}$ et l'ensemble des points de l'intervalle $]0,1[$ (Barrow, 2008, p. 81). On peut illustrer ces propos en prenant par exemple les correspondances qui suivent.

TABLE I - 1.2 – Exemple de correspondance entre les nombres entiers et des points de l'intervalle]0,1[.

$\mathbb{N}$	->	]0,1[
1	->	0,23456789···
2	->	0,57560337···
3	->	0,46325698···
4	->	0,84621638···
5	->	0,56219456···
6	->	0,46673227···
···	->	···

A partir d'un tableau de ce genre, un nouveau nombre décimal peut être construit en utilisant la première décimale du premier nombre de la colonne de droite, la deuxième décimale du deuxième nombre de cette même colonne, et ainsi de suite. Le nombre obtenu est le suivant : 0,273292··· En ajoutant à ce nouveau nombre une unité à chaque décimale, nous obtenons un nombre commençant par 0,384303$\cdots$ Ce dernier ne peut pas être égal :

- au nombre de la TABLE I - 1.2 mis en correspondance avec 1 puisque la première décimale n'est pas la même,
- au nombre de la TABLE I - 1.2 mis en correspondance avec 2 puisque la seconde décimale n'est pas la même,
- au nombre de la TABLE I - 1.2 mis en correspondance avec 3 puisque la troisième décimale n'est pas la même,
- au nombre de la TABLE I - 1.2 mis en correspondance avec 4 puisque la quatrième décimale n'est pas la même,
- etc.

Cet exemple met en évidence l'existence d'un nombre compris strictement entre 0 et 1 pour lequel il n'existe pas de bijection avec l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. Avec un raisonnement similaire, Cantor conclut, au vu de la définition 6, que le sous-ensemble des points de l'intervalle $]0,1[$ n'est pas un ensemble infini dénombrable. Il tire ces deux définitions :

Définition 4. *Un ensemble infini qui n'est pas un ensemble infini dénombrable est appelé ensemble infini indénombrable.*

Définition 5. *L'ensemble infini* $]0,1[$ *est de cardinalité C où C est la puissance du continu.*

L'ensemble $]0,1[$ sera l'ensemble de référence pour déterminer si un ensemble est de cardinalité C (cité par Thiry, 2008-2009, p. 158). On dira qu'un ensemble E est de nombre cardinal C si et seulement si E est en bijection avec $]0,1[$. Ainsi, nous pourrions montrer par exemple que l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est de cardinalité C et donc que cet ensemble est un ensemble infini indénombrable.

La dernière découverte de Cantor est l'existence d'une infinité d'infinis qui peuvent être hiérarchisés (Baudet, 2002, p. 227). Pour le montrer, et considérant que le plus petit nombre cardinal infini est $\mathcal{N}_0$, il utilise les deux propriétés qui suivent.

Propriété 2. *Soit un ensemble E de cardinalité k. Le cardinal de l'ensemble des parties de E vaut 2^k, c'est-à-dire,*

$$\begin{aligned} Card(P(E)) &= 2^{Card(E)} \\ &= 2^k \end{aligned}$$

Théorème 1. *(Cantor) Soit un ensemble E de cardinalité k. La cardinalité de E est strictement inférieure à la cardinalité de l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire,*

$$\begin{aligned} Card(E) &< Card(P(E)) \\ k &< 2^k \end{aligned}$$

En prenant comme ensemble E celui des entiers naturels $\mathbb{N}$ et donc, comme cardinalité

k, le nombre cardinal $\mathcal{N}_0$ (par la définition 3), on obtient les deux relations suivantes :

$$\begin{array}{rcll} \mid \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid & = & 2^{\mathcal{N}_0} & \quad \text{par le propriété 2} \\ \mathcal{N}_0 & < & 2^{\mathcal{N}_0} & \quad \text{par le théorème 1} \end{array}$$

En les combinant, on en déduit que

$$\mathcal{N}_0 <\mid \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid .$$

Comme Cantor démontra que les ensembles $\mathbb{R}$ est $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ont la même cardinalité (cité par Thiry, 2008-2009, p. 158), nous pouvons, par la définition 5, conclure que

$$\mathcal{N}_0 <\mid \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid = C$$

où C est la puissance du continu. Ce résultat met en évidence l'existence de deux nombres cardinaux infinis pouvant être hiérarchisés.

Propriété 3. *Soient $\mathcal{N}_0$, la cardinalité de $\mathbb{N}$ et C, la puissance du continu, alors*

$$\mathcal{N}_0 < C.$$

En appliquant le théorème de Cantor autant de fois qu'on le désire, on obtient les inégalités suivantes :

$$\mathcal{N}_0 <\mid \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid < \mid \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \mid < \dots$$

De ces relations, il déduit qu'il existe une infinité d'infinis qui peuvent être hiérarchisés. Cantor n'en reste cependant pas là et se pose la question de savoir s'il existe des ensembles ayant une cardinalité comprise entre celle de $\mathbb{N}$ et celle de $\mathbb{R}$. Cette question, mise sous forme d'une conjecture, porte le nom *d'hypothèse du continu* (Leroy, *Théorie des ensembles : Introduction*).

Hypothèse du continu.
Il n'existe pas d'ensemble A tel que $\mid \mathbb{N} \mid < \mid A \mid < \mid \mathbb{R} \mid$.

En 1938, Kurt Gödel (1906 - 1978) prouve l'impossibilité de réfuter cette hypothèse. Vingt-cinq and plus tard, P.J. Cohen (1934 - 2007) démontre quant à lui l'impossibilité de la valider. La validité ou non de cette hypothèse ne peut être déterminée.

I - 1.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de développer le premier point des analyses préalables qui constituent la première phase de l'ingénierie didactique proposée par Artigue : l'analyse à caractère épistémologique des contenus visés par l'enseignement.

En parcourant différentes périodes de l'histoire, nous avons pu mettre en avant les obstacles qu'ont rencontrés les deux types d'infini communément admis à l'heure actuelle et certaines notions liées à l'infini, avant d'être intégrés dans le savoir savant. Les paradoxes de Zénon d'Elée ont mis en lumière le danger que représente, pour les mathématiciens de l'époque, la notion d'infini. Cet infini, considéré uniquement comme potentiel à ce moment, a amené à bien d'autres difficultés, en témoigne l'utilisation de notions mathématiques y afférant, notamment les sommes infinies. En effet, ces sommes ont souvent été mises de côté et ce, jusqu'au 18$^{\text{ème}}$ siècle, les mathématiciens ne maitrisant pas l'infini potentiel sous-entendu derrière cette notion.

C'est seulement au 19$^{\text{ème}}$ siècle, à l'aide de Cantor que l'infini actuel put enfin être clarifié. Grâce à son travail considérable sur les ensembles infinis, il permit de clarifier la notion d'infini et son intégration dans le savoir savant.

Chapitre I - 2

Analyse des conceptions des étudiants, des difficultés et obstacles rencontrés

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté une analyse à caractère épistémologique sur la notion d'infini. Il est intéressant de se demander si, à l'heure actuelle, les étudiants rencontrent les mêmes obstacles que ceux qui ont été identifiés dans cette étude. L'objectif du présent chapitre est d'analyser, à travers un questionnaire se basant sur des notions mathématiques liées à l'infini, la perception qu'en ont les étudiants de première année de baccalauréat en sciences mathématiques ou physiques de l'Université de Namur [1].

I - 2.1 Motivations

Cette phase de motivation a été réalisée à l'aide des écrits de Douady (1992) et Munos née Goiran (2001-2002).

Comme mentionné dans le premier chapitre, deux conceptions de l'infini existent : l'infini potentiel et l'infini actuel. L'infini potentiel, qui a dominé dans le passé, est pensé comme un processus sans fin, qui peut être prolongé. L'infini actuel est par contre conçu comme un résultat « complet », plus difficile à percevoir comme le dit Fischbein (1998) (cité par Zeroallazero, 2009, p. 188) :

> *Alors que l'infini potentiel peut être compris, saisi, accepté intuitivement comme un processus illimité,* [$\cdots$] *notre esprit n'est pas capable d'embrasser d'un regard une infinité d'éléments.*

Si ces deux types d'infini se rencontrent naturellement dans les mathématiques, ils ne font pas l'objet d'un enseignement explicite. De manière implicite par contre, de nombreuses notions sous-tendent ces deux infinis : derrière le concept de série se cache par exemple un infini potentiel.

Pour Chevallard et Joshua (1982, p. 187), *on appelle notions paramathématiques les*

1. Pour le lecteur intéressé, des recherches préalables ont été engagées sur la perception qu'ont des élèves de maternelles, primaires et secondaires de l'infini (*Annexe A*).

notions qui se rencontrent dans « l'environnement » du travail mathématique pour y jouer le rôle d'outils de travail sans être elles-mêmes des objets d'étude. Notons que Douady (1986) distingue, pour tout objet mathématique, son caractère « outil » et son caractère « objet ». Elle entend, derrière le premier, l'usage que fait l'étudiant de l'objet mathématique pour résoudre un problème. Par le caractère *objet*, elle sous-entend le fait que le concept mathématique considéré a sa place dans le savoir mathématique de référence à un moment de l'apprentissage. Dès lors, l'infini potentiel et actuel ne peuvent être pris comme des objets, puisqu'ils ne font pas partie du savoir mathématique de référence, mais bien comme des outils. Nous pouvons ainsi les considérer comme des notions paramathématiques utilisées lors de l'enseignement d'objets mathématiques tels que :

– l'induction mathématique (liée à l'infini potentiel),
– les ensembles infinis (liés à l'infini actuel),
– les infiniment petits (liés à l'infini actuel),
– les nombres décimaux illimités (liés à l'infini potentiel),
– les limites (liées à l'infini potentiel et actuel),
– les séries (liées à l'infini potentiel et actuel).

Il est intéressant de se demander comment les étudiants perçoivent la notion d'infini dans ces différentes matières. Nous basant sur celles-ci, nous allons donc élaborer un questionnaire permettant de dégager les difficultés rencontrées par les étudiants dans l'étude des dites matières. Préalablement, introduisons le concept de *cadre*.

I - 2.1.1 Cadres de Douady

Selon Douady (1992, p. 135), un cadre est défini comme :

> *constitué des objets d'une branche mathématique, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations.*

Citons par exemple le cadre algébrique, numérique, géométrique ou encore le cadre de la vie courante. Ce dernier concerne le langage mais n'inclut pas les définitions ou les théorèmes formels. C'est un cadre dans lequel on peut s'exprimer comme dans la vie de tous les jours. Il est à noter qu'un même objet peut se trouver dans plusieurs cadres à la fois : par exemple, le concept de série peut s'utiliser dans un cadre algébrique mais aussi dans un cadre géométrique (cfr section I - 2.2.4). Selon Douady (1992, p. 135), un tel changement

> *est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation.*

Douady met en lumière l'importance de ne pas s'en tenir à un seul cadre lors de l'enseignement d'un concept aux étudiants. Effectuer des changements de cadres est ce qu'elle appelle des jeux de cadres. Selon elle, ces transpositions didactiques permettent de passer du savoir savant au savoir enseigné, processus aidant l'étudiant à construire ses propres connaissances.

Dans l'élaboration du questionnaire, nous utiliserons différents cadres pour poser nos problèmes mathématiques. En analysant les réponses apportées par les étudiants, nous observerons à quel(s) type(s) d'infini ils associent les différentes notions mathématiques abordées ainsi que les difficultés qu'ils ont rencontrées. On pourra également se poser la question de savoir s'il y a un cadre à privilégier pour proposer une situation (a-didactique) dédiée à l'infini.

I - 2.2 Questionnaire : rédaction, analyse a priori et résultats

Le questionnaire (*Annexe B*) fut expérimenté auprès des étudiants de première année en baccalauréat mathématique ou physique de l'Université de Namur. Il est composé de différentes fiches de questions proposées dans des cadres de la vie courante et géométrique. Au total, quatorze physiciens et quinze mathématiciens ont été interrogés. Cette séance ayant été réalisée en juin 2014, nous pouvons affirmer que toutes les notions nécessaires pour répondre aux questions ont été abordées dans différents cours au plus tard durant cette même année scolaire. Du point de vue didactique, nous ne cherchons pas à analyser en profondeur les réponses, l'objectif du questionnaire étant de dégager des pistes pour d'éventuelles questions de recherche qui mériteraient d'être approfondies.

I - 2.2.1 Première question : réflexion

Objectif

Au cours du parcours scolaire classique, différentes notions telles que les limites, les nombres décimaux illimités, sont appréhendées. Derrières celles-ci on retrouve le concept d'infini potentiel et d'infini réel. Cependant, lors de l'étude de ces matières, la différence entre l'utilisation des deux types d'infini n'est jamais mentionnée. La première fiche de questions (Figure I - 2.1) nous permet de déterminer quel(s) type(s) d'infini les étudiants perçoivent derrière ces différentes notions.

Analyse a priori

Pour débuter notre questionnaire, nous travaillons dans un cadre de la vie courante. Toutes les questions figurant dans cette fiche ont été conçues dans le but d'obtenir des réponses naïves et spontanées : elles sont ouvertes et la forme des réponses (mathématique ou non) n'est jamais précisée. Il sera également intéressant de déterminer si les étudiants parviennent à expliciter des connaissances vues aux cours et qui sous-tendent la notion d'infini : celle de limite est abordée par les deux sections au cours d'*Analyse Réelle*, celle d'ensemble infini, par les mathématiciens, au cours d'*Initialisation à la démarche mathématique*.

Fiche 1

1. Si vous deviez expliquer ce qu'est *l'infini*, que diriez-vous ?

2. Si vous deviez associer des mots à celui du mot *infini*, quels seraient-ils selon vous ?

3. Si vous deviez expliquer ce qu'est une *limite*, que diriez-vous ?

4. La notion de limite est-elle, selon vous, liée à la notion d'infini ? Si oui, expliquez.

5. Si vous deviez expliquer ce qu'est un *ensemble infini*, que diriez-vous ?

6. Si vous deviez expliquer ce qu'est un *ensemble infini dénombrable*, que diriez-vous ?

7. Si vous deviez expliquer ce qu'est un*ensemble infini non dénombrable*, que diriez-vous ?

8. Pouvez vous donner des exemples d'ensembles infinis dénombrables et non dénombrables ?

Figure I - 2.1 – Première fiche de questions

Analyse a posteriori

<u>Question 1 : Qu'est ce que l'infini</u>

Cette question nous permet d'observer le(s) type(s) d'infini le(s) plus souvent sous-entendu(s) dans les réponses des étudiants.

Table I - 2.1 – Tableau récapitulant les réponses des étudiants concernant la définition d'infini

	Phys. (/15)	Math. (/14)
Infini potentiel	2	6
Infini actuel	7	2
Infini potentiel et actuel	3	4
Flou	1	2
Aucun	2	0

L'infini potentiel est plus souvent sous-entendu chez les mathématiciens :

> *C'est l'appellation de la continuité vers un nombre très grand/très petit. Si on retire ou augmente n, un nombre réel, de une unité perpétuellement, ceci est du ressort de l'infini.*

Les physiciens au contraire perçoivent plus facilement l'infini actuel :

> *C'est quelque chose de plus grand que tout autre chose. C'est un nombre extrêmement grand, ou extrêmement petit, plus grand ou plus petit que tous les nombres existants.*

De plus, certains étudiants ont mentionné les deux types d'infini dans leur réponse :

> *Un concept qui est la limite des nombres qu'on peut compter ; quoiqu'on y ajoute, il reste l'infini. C'est quelque chose qu'on ne sait pas atteindre et qui représente l'infiniment grand ou l'infiniment petit.*

Remarquons que les étudiants sont plus enclin à considérer l'infiniment grand que l'infiniment petit.

Table I - 2.2 – Tableau récapitulant le nombre de conceptions spontanées d'infiniment grand ou/et d'infiniment petit

	Phys. (/15)	Math. (/14)
Infiniment grand	11	6
Infiniment petit	0	0
Les deux	1	7
Aucun	3	1

A en croire le tableau I - 2.2, la plupart des physiciens ne perçoivent derrière l'infini qu'une idée de grandeur. Les mathématiciens quant à eux sont conscients qu'un infiniment petit existe au même titre qu'un infiniment grand. Partant de ce constat, il nous semble pertinent d'envisager à l'avenir la mise en place d'un travail de conscientisation de l'existence de l'infini potentiel.

Question 2 : Mots associés à l'infini

Chaque étudiant ayant associé à l'infini plusieurs mots nous paraissant intéressants à exploiter, les résultats de cette question seront traités de manière qualitative. Nous décidons également de ne pas diviser les réponses suivant qu'elles sous-entendent l'idée d'un infini potentiel ou non, l'intérêt étant de mettre en lumière les associations de mots réalisées par les étudiants. Les principaux éléments ressortant de notre analyse sont les suivants :

1. Processus sans fin.

Ex : *long, sans s'arrêter, toujours plus grand, qu'on atteint jamais, loin, inaccessible, sans fin, inatteignable, sans bout, éloigné.*

2. Quelque chose de très grand (/très petit).

Ex : *énorme, trop grand, immense, gigantesque, très grand* $(+\infty)$*, très petit* $(-\infty)$*.*
Remarquons que *très petit* n'a en réalité été cité qu'une seule fois, ce qui corrobore les observations de la première question.

3. Limite.

Ce terme est revenu plusieurs fois dans les réponses. Notons cependant que, souvent citée seule, il est possible que cette réponse ait été suscitée à l'étudiant par la lecture de la question suivante qui cite explicitement le mot « limite ».

4. Convergence, divergence.
Le mot convergence a été mentionné une fois par un mathématicien, tandis que l'idée de divergence a été citée par un physicien.

5. Indénombrable, non mesurable.
Ex : *quelque chose qu'on ne peut pas quantifier mais qui a un sens, incomptable.*

6. Abstrait, complexe, différent, imaginaire.
Ex : *n'existe pas, vague, flou, complexe.*

7. Temps, nature, espace.

8. Borne, asymptote, non borné, boucle.

9. Idée d'extrémité.
Ex : *vision extrême, concept mathématique complexe portant à la compréhension de théorèmes et de principes lorsque les valeurs sont aux extrêmes.*

A l'instar des résultats obtenus à la première question, nous pouvons tirer de ces différentes catégories la conclusion suivante : derrière les idées de *processus sans fin* et de *quelque chose de grand* – les plus souvent citées par les étudiants – c'est l'infiniment grand qui est sous-entendu.

Question 3 et 4 : Définition de limite et lien avec l'infini

Les questions 3 et 4 ayant pour sujet commun les limites, nous les analysons en parallèle. Notons qu'elles sont idéales pour faire émerger l'idée d'infini potentiel. Notons d'ailleurs que les définitions de la grande majorité des étudiants comportent des termes tels que *tend vers* ou encore *s'approche de*. En regroupant par thème les définitions des étudiants, nous obtenons le tableau suivant :

Table I - 2.3 – Tableau récapitulant le nombre d'étudiants utilisant les différents thèmes pour définir la notion de limite

Thème	Phys. (/15)	Math. (/14)
Suite	2	4
Fonction	6	8
Suite et fonction	1	1
Flou	4	1
Incompris	2	0

Nombreux sont ceux qui utilisent les suites et/ou les fonctions pour expliquer ce qu'est une limite. Ce fut le cas pour tous les mathématiciens (sauf un) et pour plus de la moitié des physiciens. Il est difficile par contre de déterminer le contexte dans lequel la limite est placée dans le chef de la petite moitié restante, en témoignent des phrases telles que :

On s'approche sans le toucher, ou encore, *c'est la valeur vers laquelle tend l'expression*, ou *c'est lorsque quelque chose s'approche très très près sans jamais l'atteindre.*

La dernière ligne de ce tableau reste inexpliquée. Nous supposons que ces deux physiciens ne sont pas en mesure d'expliquer ce qu'est une limite (*nombre qui tend vers un autre* ; *c'est quand un nombre est presqu'un certain nombre défini, quand un nombre tend vers un autre*).

Enfin, pour être complet dans notre analyse, observons de plus près les résultats où les termes de suites et de fonctions ont été évoqués. Mathématiquement, différents cas s'offrent à nous lorsqu'on étudie la limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou d'une fonction f :

– Suite :

$$\begin{array}{llll} & \lim\limits_{n\to\infty} u_n & = \pm\infty & \\ ou & \lim\limits_{n\to\infty} u_n & = a & (a \in \mathbb{R}) \\ ou & \lim\limits_{n\to\infty} u_n & \text{n'existe pas} & \end{array}$$

– Fonction :

$$\begin{array}{llll} & \lim\limits_{x\to a} f(x) & = b & (b \in \mathbb{R}) \\ ou & \lim\limits_{x\to a} f(x) & = \pm\infty & \\ ou & \lim\limits_{x\to a} f(x) & \text{n'existe pas} & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} & \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) & = b & (b \in \mathbb{R}) \\ ou & \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) & = \pm\infty & \\ ou & \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) & \text{n'existe pas} & \end{array}$$

Les deux types d'infini sont bien présents dans ces différents cas : le potentiel est sous-entendu par le symbole « $\to$ » qui signifie *tend vers, s'approche de plus en plus de*, alors que l'actuel l'est par le symbole infini (∞) en lui-même.

En ce qui concerne les suites :

– Chez les physiciens : seule l'idée de l'infini potentiel est sous-entendue dans les réponses. De plus, l'analyse des écrits laisse à croire que les étudiants ne conçoivent que la convergence de suite vers un nombre réel.
  Ex : *La limite d'une suite est la valeur dont elle va s'approcher sans jamais l'atteindre. Une valeur qui ne bouge plus lorsqu'on considère toujours des éléments plus nombreux.*

– Chez les mathématiciens : le constat est similaire mis à part qu'un étudiant sur les quatre ayant mentionné les suites (cfr tableau I - 2.3) a émis l'idée d'infini actuel.
  Ex : *C'est le fait de se rapprocher le plus possible d'un nombre (ou de l'infini) sans jamais l'atteindre.*

En ce qui concerne les fonctions, l'analyse des réponses fut par contre très difficile : en prenant le cas général de limite de fonction, à savoir,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad (a, b \in \overline{\mathbb{R}})$$

on constate que les valeurs de a et b ne sont pas toujours mentionnées par les étudiants ou en tout cas, le sont de manière tellement peu précise qu'il est impossible de déterminer ce qu'ils comprennent réellement. En conséquence, il n'est pas aisé de déterminer si les étudiants perçoivent qu'il peut y avoir la présence d'un infini actuel, leurs réponses pouvant être interprétées de multiples manières.

En conclusion, si les questions sur les limites sont idéales pour faire émerger l'idée d'infini potentiel, il n'en va pas de même concernant l'infini actuel, qui n'est que très rarement cité spontanément par les étudiants.

Questions 5-6-7-8 : Ensembles infinis, infinis dénombrables et non dénombrables

Ces questions ayant pour sujet commun les ensembles infinis, nous décidons de les analyser en parallèle.

La cinquième question, demandant d'expliquer la notion d'ensemble infini, cible parfaitement l'infini potentiel. Ces ensembles sont tels qu'ils contiennent *une infinité d'éléments*, ce qui sous-entend l'idée de potentialité. Etant donné que les étudiants de première année en mathématique ou physique n'ont pas eu la même formation par rapport à cette notion, il est intéressant de mener notre analyse de façon distincte.

Les physiciens mettent en avant l'idée d'infini potentiel. Mis à part un étudiant définissant un ensemble infini comme étant un ensemble possédant un nombre fini de termes et deux abstentions, tous les autres étudiants ont donné des définitions telles que :

- *ensemble contenant une infinité d'éléments,*
- *ensemble d'éléments avec plein de choses dedans, tellement que si on veut les compter, on n'aura jamais fini,*
- *ensemble sans limite.*

De même, on observe l'infini potentiel dans les réponses des mathématiciens. Seuls deux d'entre-eux n'y font pas référence, en témoignent leurs explications :

- *il y a pas de nombre fixé, figé d'éléments dans cet ensemble,*
- *ensemble dont on ne peut pas savoir le nombre de termes qu'il contient.*

En ce qui concerne les questions portant sur les ensembles infinis dénombrables et non dénombrables (questions 6 et 7), les réponses fournies varient fortement d'une section à l'autre. Rappelons qu'on définit des ensembles infinis dénombrables et non dénombrables de la façon suivante :

Définition 6. *Un ensemble est dit infini dénombrable si et seulement si ses éléments peuvent être mis en bijection avec les entiers naturels.*

Définition 7. *Un ensemble infini qui n'est pas un ensemble infini dénombrable est appelé ensemble infini indénombrable.*

Les physiciens distinguent ces deux types d'ensembles infinis selon qu'on puisse *compter* les éléments de l'ensemble ou non (sept physiciens sur les quinze). Les mathématiciens quant à eux sont nombreux à se référer à la bijection qui existe entre un ensemble infini dénombrable et l'ensemble $\mathbb{N}$. Pour comparer ces différences de réponses entre les deux sections, nous décidons donc, dans le cas des ensembles infinis dénombrables, de catégoriser les explications des étudiants en fonction de la présence des idées de :

- ensemble infini,
- ensemble $\mathbb{N}$,
- bijection.

La FIGURE I - 2.2 permet de visualiser ces distinctions.

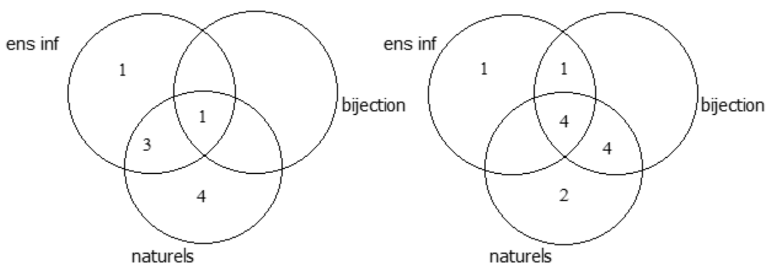


FIGURE I - 2.2 – Nombre de physiciens (gauche) et de mathématiciens (droite) présentant les idées d'*ensemble infini*, d'*ensemble* $\mathbb{N}$ ou de *bijection* dans leur réponse

A première vue, les physiciens ne pensent pas à la bijection existant avec $\mathbb{N}$, contrairement aux mathématiciens, en témoignent leurs réponses :

1. A l'intersection des trois ensembles, seul un physicien a compris ce qu'était un ensemble infini dénombrable (*ensemble infini à chaque élément duquel on peut associer un et un seul élément de* $\mathbb{N}$). Les mathématiciens sont au nombre de quatre.
   Ex : *Si on arrive à organiser les éléments d'un ensemble infini pour leur faire correspondre les naturels, alors il est dénombrable. Un ensemble infini est dénombrable s'il est en bijection avec* $\mathbb{N}$.

2. A l'intersection des ensembles des naturels et infinis, trois physiciens se rapprochent de la définition admise d'ensemble infini dénombrable.
   Ex : *Ensemble contenant un nombre infini de termes mais que l'on peut compter (au moins jusqu'à un certain point). Ensemble infini où les éléments qui le forment peuvent être comptés (par exemple les entiers).*

3. Quatre physiciens et deux mathématiciens n'ont que l'idée des naturels.
   Ex : *Ensemble avec plein de points qu'on peut compter. C'est un ensemble extensible mais où il est possible de dénombrer (=« compter ») son contenu.*

4. L'idée seule d'ensemble infini est émise par un physicien et deux mathématiciens.
   Ex : *Ensemble dont on ne sait identifier les éléments mais qui en contient une infinité. Ensemble dont le nombre d'éléments est infini mais dont on ne sait pas approcher le nombre.*
   Cette dernière explication, fausse, est bien loin d'expliquer ce qu'est un ensemble infini dénombrable.

5. Un mathématicien définit un ensemble infini dénombrable comme étant en bijection avec l'ensemble $\mathbb{R}$.

6. A l'intersection des bijections et des naturels, on constate que quatre mathématiciens se rapprochent de la définition admise d'ensemble infini dénombrable.
   Ex : *Ensemble dans lequel on peut faire une bijection avec les nombres naturels. Ensemble dont chaque nombre contenu dans cet ensemble peut être associé à un nombre appartenant à $\mathbb{N}$; le cardinal de cet ensemble peut être calculé.*

Pour être complet, remarquons que quatre physiciens se sont abstenus de répondre et que les explications de deux d'entre-eux, ainsi que d'un mathématicien, n'appartiennent à aucun des ensembles cités auparavant.

Ex : *Ensemble sans limite mais dont on peut distinguer les éléments. Ensemble dont chaque terme possède une propriété commune avec un autre ensemble infini. Ensemble d'objets où il y en a n (n est une valeur immensément grande mais ça n'est pas l'infini.)*

Cette dernière réponse pourrait être interprétée comme un refus de lier l'infini actuel et l'infini potentiel. On peut supposer que l'étudiant conçoit que cet ensemble a beaucoup d'éléments mais pas qu'il en possède une infinité.

Même si beaucoup d'étudiants parlent d'ensembles infinis en bijection avec $\mathbb{N}$, ou au moins, d'ensembles en bijection avec $\mathbb{N}$, on se demande si la notion d'ensemble infini dénombrable est véritablement comprise. Cette supposition se renforce lorsqu'on observe les résultats aux questions concernant les ensembles infinis non dénombrables et leurs illustrations par des exemples. En effet, pour définir ces ensembles, les étudiants donnent très souvent la négation de la définition qu'ils utilisent pour les ensembles infinis dénombrables.

Ex : *ensemble dans lequel on peut faire une bijection avec les nombres naturels* (pour les ensembles infinis dénombrables), et *ensemble dans lequel on ne peut pas faire une bijection avec les nombres naturels* (pour les ensembles infinis non dénombrables).

Seuls deux mathématiciens ont défini différemment un ensemble infini non dénombrable, en témoigne l'exemple suivant : *Il est équipotent à $\mathbb{R}$ (on peut presque dire qu'ils ont le même nombre d'éléments).*

Il semble que pour cet étudiant, un ensemble est infini non dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec $\mathbb{R}$. En réalité, si un ensemble infini a cette propriété, alors, il est non dénombrable, mais ceci n'est en rien une condition nécessaire et suffisante.

En ce qui concerne les illustrations des ensembles infinis (non) dénombrables, on constate beaucoup d'erreurs, surtout chez les physiciens, en témoignent les exemples suivants :
- pour les dénombrables : $\{\emptyset\}$, $]0, 1[$,
- pour les non dénombrables : $\mathbb{Q}$, *ensemble des nombres premiers*.

En conclusion, les étudiants ne semblent pas maitriser les notions d'ensembles infinis dénombrables et non dénombrables, même les mathématiciens ayant suivi le cours d'*Initialisation à la démarche mathématique*.

I - 2.2.2 Deuxième question : le paradoxe de Zénon d'Elée

Même si aujourd'hui nous distinguons parfaitement l'infini potentiel du réel, ce ne fut pas toujours le cas. Il nous parait important que les étudiants aient conscience des débats qu'ont suscité ces interrogations, un bel exemple étant le paradoxe de la flèche et la cible de Zénon d'Elée.

Analyse a priori

Une adaptation de ce paradoxe a été conçue à la FIGURE I - 2.3 pour faire émerger la notion d'infini potentiel.

Fiche 2 : Paradoxe de la flèche de Zénon

Pour qu'une flèche atteigne sa cible, celle-ci doit parcourir la distance qui la sépare de la cible. Lorsqu'une flèche en mouvement parcourt un certain trajet, il faut qu'elle parcourt d'abord la moitié de ce trajet, et **après**[a] encore, la moitié de cette moitié et ainsi de suite. Ce processus de division du parcours de la flèche est donc infini. On peut donc en conclure que le procédé n'a jamais de fin et donc, que la flèche n'atteindra jamais sa cible.

1. **Que penses-tu du raisonnement de Zénon ? Te semble-t-il correct ? Si oui, pourquoi ? Si non, développe ton raisonnement.**

2. **Que penses-tu de la conclusion de Zénon ? Te semble-t-elle correcte ? Si oui, pourquoi ? Si non, développe ton raisonnement.**

a. Initialement, nous avions écrit le mot **avant** à la place d'**après**. Avec la première version, les étudiants pouvaient répondre que, étant donné que la flèche a déjà parcouru la première moitié de la distance la séparant de la cible, toutes les autres distances ont donc nécessairement été parcourues.

FIGURE I - 2.3 – Deuxième fiche de questions

Nous proposons à nouveau de travailler dans le cadre de la vie courante de sorte à poser des questions ouvertes. Cette forme de questionnement permet aux étudiants de répondre librement aux questions sans être influencés par des propositions de réponses.

Ce paradoxe permet de constater si les étudiants perçoivent qu'un résultat fini (la flèche qui atteint sa cible) peut se cacher derrière un processus illimité (l'addition des distances parcourues).

On s'attend à ce que la plupart des étudiants réponde favorablement à la première question, le fait de continuer indéfiniment à diviser une distance en deux semblant plausible. Il est par contre attendu qu'ils rejettent la conclusion de Zénon : affirmer que la flèche n'atteindra jamais sa cible semble physiquement inconcevable.

Analyse a posteriori

Cette question est identique en terme de milieu à la quatrième fiche de questions portant sur la spirale infernale que nous présenterons par la suite (section I - 2.2.4). Espacer ces deux fiches nous parait pertinent afin que les étudiants ne distinguent pas la similarité des thèmes abordés[2].

I - 2.2.3 Troisième question : les décimaux illimités

Dans l'antiquité, les Pythagoriciens ont éprouvé des difficultés face aux nombres incommensurables. Les décimaux illimités appartenant à cette même famille, il ne serait pas étonnant de constater divers problèmes lors de leurs utilisations par les étudiants d'aujourd'hui. Une nouvelle fiche va nous permettre de vérifier cette hypothèse.

Analyse a priori

Grâce à la fiche de questions proposée à la Figure I - 2.4 il nous est possible de faire émerger l'infini potentiel que sous-entendent les nombres décimaux illimités.

Fiche 3

1. Selon vous, peut-on dire que $1,999999\cdots$ est égal à deux ?

2. Selon vous, quel est le résultat de la soustraction suivante : $1,999999\cdots - 0,999999\cdots$?

Expliquez votre raisonnement.

Figure I - 2.4 – Troisième fiche de questions

A nouveau, nous travaillons dans le cadre de la vie courante. Le choix des variables a été effectué afin d'obtenir des nombres décimaux illimités périodiques.

La première question cible uniquement l'émergence de l'infini potentiel que sous-entendent les nombres décimaux illimités. La deuxième quant à elle va au-delà de cet

2. Nous vous référons donc à l'analyse de cette question pour plus de détails.

objectif. En effet, on peut imaginer la confusion suivante dans la tête des étudiants : si un nombre a une infinité de décimales, alors ce nombre est infini et donc il est égal à l'infini. Nous sommes donc face à une confusion entre la syntaxe et le sémantique. Cependant, nous nous attendons peu à ce genre de réponse.

Il est aussi intéressant d'observer comment les étudiants vont gérer ces nombres décimaux illimités périodiques : ne pas savoir si le nombre de chiffres après la virgule est le même pour les deux nombres décimaux pourrait influencer leur réponse.

Analyse a posteriori

Comme nous le constatons dans la Table I - 2.4, un physicien est plus enclin à arrondir le décimal illimité périodique 1,99999. . . à 2. Par ailleurs, trois répondants ont mis en évidence le contexte de réponse en affirmant que les physiciens arrondissent plus facilement les décimaux à l'unité supérieure que les mathématiciens :
Ex : *C'est différent mais un physicien approximera à 2. Pour un mathématicien théoricien cela dépend sans doute aussi du contexte où* $1,999\cdots$ *intervient.*

Table I - 2.4 – Tableau récapitulant les réponses des étudiants à la première question concernant les décimaux illimités

	Phys. (/15)	Math. (/14)
oui	9	3
non	5	9
distinction math-physique	1	2

Allons plus loin en observant la présence ou non d'infini potentiel dans leurs justifications par le biais de la Table I - 2.5.

Table I - 2.5 – Tableau récapitulant la présence ou non d'infini potentiel dans la justification de l'égalisation ou non de $1,9999\cdots$ à 2

	Phys. (/9)	Math. (/11)
infini potentiel	5	7
aucun	4	4

Remarquons tout d'abord que seuls neuf physiciens et onze mathématiciens ont justifié leur propos. Ensuite, nous observons que l'infini potentiel est sous-entendu dans la plupart des cas :
Ex : *Non, ce nombre tend vers deux, donc on s'en rapproche de plus en plus. Oui,* $1,9999 \neq 2$ *mais* $1,9999\cdots = 2$ *car c'est une « limite cachée » en quelque sorte.*

L'infini actuel quant à lui n'est mentionné dans aucune réponse, signifiant qu'aucun étudiant ne confond un nombre comportant une infinité de décimales avec l'infini lui-même. Enfin, certains d'étudiants ne font référence à aucun type d'infini.

La seconde question, portant sur le thème de la soustraction de nombres décimaux illimités périodiques, amène d'autres difficultés.

TABLE I - 2.6 – Tableau récapitulant les réponses des étudiants à propos de la soustraction de nombres décimaux illimités périodiques.

	Phys. (/15)	Math. (/14)
résultat défini	10	6
résultat indéfini	3	7
dépend de la précision	0	1
abstention	2	0

Comme nous le voyons dans la TABLE I - 2.6, une majorité des étudiants affirme que la soustraction est définie, bien qu'un mathématicien sur deux estime le contraire. Une façon d'analyser les justifications de ces réponses est d'observer si l'infini potentiel a été sous-entendu.

TABLE I - 2.7 – Tableau récapitulant la présence ou non d'infini potentiel dans la justification de la soustraction de nombres décimaux illimités périodiques

	Phys. (/9)	Math. (/10)
infini potentiel	8	7
infini actuel	1	3

Remarquons que cette fois, seuls neuf physiciens et dix mathématiciens ont justifié leur réponse. Comme pour la première question, l'infini potentiel est le plus souvent sous-entendu. Ces réponses mettent en lumière l'importance qu'accordent les étudiants au nombre de décimales après la virgule :
Ex : *Non, il est impossible de voir s'il y a le même nombre après la virgule dans chacun des termes de la différence. Si* $1,9999\cdots$ *et* $0,9999\cdots$ *ont le même nombre de décimales, leur différence vaut un.*

Pour les autres, on constate une confusion entre l'infini actuel et l'infini potentiel, en témoignent les exemples suivants :

1. *Non car un* ∞ *n'est pas forcément le même* ∞ *qu'un autre (ça se saurait si* $\infty - \infty = 0$*), et donc on ne peut pas conclure une solution définie car on a pas forcément le même degré de précision.*

2. *Non car on va soustraire des valeurs avec des décimales infinies et les infinis ne se comparent pas ; indétermination.*

Ainsi, on constate que la soustraction de nombres décimaux illimités est problématique pour les étudiants : selon certains, l'opération ne peut s'effectuer que si les deux termes comportent un même nombre de décimales. D'autres confondent les nombres à décimales illimitées avec l'infini en lui-même.

I - 2.2.4 Quatrième question : la spirale infernale

Le milieu dans lequel nous nous situons pour cette dernière fiche est similaire à celle traitant du paradoxe de Zénon : elles ont pour sujet commun les « séries ». Cependant, les cadres utilisés divergent : géométrique pour celle-ci, de la vie courante pour l'autre. Ce changement permet de comparer les outils utilisés et les difficultés des étudiants ressortant de l'analyse des réponses de chacune des deux fiches. Rappelons que pour Douady (1992, p. 135) :

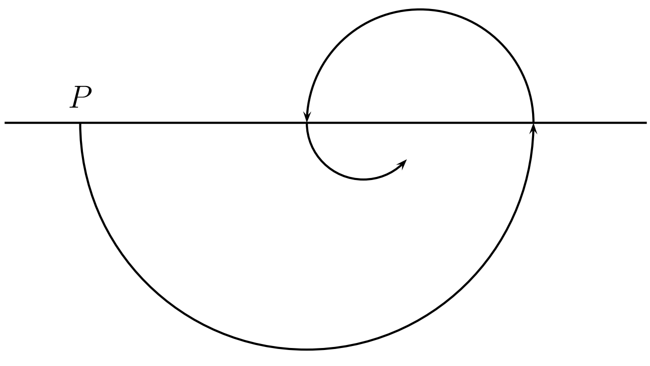
> *Un tel changement est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation.*

Analyse a priori

Pour cette question, reprise à la FIGURE I - 2.5, nous nous sommes inspirées de celle proposée par G. Zeroallazero (2009, p. 304) pour faire émerger la notion d'infini potentiel que sous-entendent les séries.

Fiche 4 : Une étrange spirale

D'un point de départ P d'abscisse 0, on suit une demi-circonférence de **rayon 1** [a], puis on suit une demi-circonférence de rayon $\frac{1}{2}$ (voyez le dessin). Et ainsi de suite, on parcourt des demi-circonférences de rayon égal chaque fois à la moitié du rayon de la demi-circonférence précédente.



1. **Ce processus permet-il d'arriver à un point final ? Si oui, à quelle distance du point de départ P, sur l'axe, pourrait-il se trouver ?** [b]

2. **Quelle sera la longueur du chemin parcouru sur les demi-circonférences ?**

a. Initialement, le mot **rayon** n'était pas mis en évidence. Il nous semblait cependant nécessaire d'attirer l'attention des étudiants sur cet élément.

b. Au départ, la question était : « A quelle distance du point de départ P, sur l'axe, pourrait se trouver le « point d'arrivée » ». Il nous a semblé judicieux de la modifier pour ne pas influencer les réponses quant à l'existence du point d'arrivée.

FIGURE I - 2.5 – Quatrième fiche de questions

Nous choisissons d'égaler le rayon de la première demi-circonférence à un, celui de la deuxième demi-circonférence à $\frac{1}{2}$ et ainsi de suite. D'autres choix de rayons peuvent convenir pour autant que la spirale obtenue soit convergente.

Cette fiche poursuit deux objectifs : le premier est de constater l'émergence de l'infini potentiel sous-tendu par les séries. Le second est de percevoir si les étudiants conçoivent qu'un processus illimité peut engendrer un résultat fini.

Pour répondre à la première question (sur la position du point d'arrivée, appelée S), il suffit de constater, en se basant sur la représentation géométrique de la spirale, que : du point de départ, on avance de deux unités (la demi-circonférence de départ ayant un rayon de un), on recule ensuite d'une unité (la demi-circonférence suivante ayant un rayon de $\frac{1}{2}$) et ainsi de suite, ce qui entraine que

$$S = 0 + 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \cdots$$

Pour être plus précis quant à la position du point d'arrivée de la spirale, nous pouvons écrire cette égalité sous la forme suivante :

$$S = 2\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^i$$

On constate que S est une série géométrique de raison $(-\frac{1}{2})$. Nous obtenons ainsi par propriété que

$$S = 2\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^i = \frac{2}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

La position finale du point P se situe sur l'axe horizontal en $\frac{4}{3}$, illustrant l'idée qu'un résultat fini peut être obtenu malgré l'utilisation d'un processus infini (addition illimitée de termes). Remarquons que d'autres outils existent pour obtenir ce même résultat. Par exemple, regroupons le premier terme de la série S avec le deuxième, le troisième avec le quatrième et ainsi de suite, en y soustrayant ensuite $\frac{S}{4}$. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
S &= (2-1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right) + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots \\
S - \frac{S}{4} &= \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) = 1 \\
S &= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Pour répondre à la deuxième question (sur la longueur parcourue), observons que, comme le rayon de départ est de 1 et que le périmètre d'une demi-circonférence est de πr, la première distance parcourue est π. La deuxième demi-circonférence a un rayon de $\frac{1}{2}$. Dès lors, la distance parcourue est de $\frac{\pi}{2}$. En continuant ce processus et en utilisant un raisonnement analogue à celui de la première question, on obtient une distance parcourue de 2π. Le processus illimité renvoie de nouveau à un résultat fini.

Analyse a posteriori

Pour cette analyse a posteriori, nous décidons de comparer certaines réponses d'étudiants avec celles de la deuxième fiche de questions (paradoxe de Zénon).

Question 1 : Position du point d'arrivée de la spirale

Nous retrouvons dans la plupart des réponses (surtout chez les mathématiciens) ce qu'on pourrait appeler l'infini potentiel :

Table I - 2.8 – Tableau récapitulant la présence ou non d'infini potentiel dans la question concernant la position du point d'arrivée de la spirale

	Phys. (/15)	Math. (/14)
infini potentiel	7	11
aucun	8	3

Les réponses sous-entendant cet infini sont du type

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \qquad \textit{ou encore} \qquad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots$$

Par contre, on n'en retrouve aucune trace dans les justifications telles que : *à peu près à* $\frac{2}{3}$ *du diamètre de la première circonférence*, ou encore, *entre 0,5 et 0,75.*

Pour aller plus loin, regardons le nombre de mauvaises et de bonnes réponses. Ces dernières reprennent :

- les raisonnements valides (même s'il y a confusion entre le rayon et le diamètre de la spirale),
- les réponses exactes (même s'il n'y a pas de justifications).

Table I - 2.9 – Tableau récapitulant le nombre de bonnes réponses concernant la question de la position du point d'arrivée de la spirale

	Phys. (/15)	Math. (/14)
correct	5	9
incorrect	9	5
autre	1	0

Nous constatons que les mathématiciens sont plus nombreux à raisonner correctement. Cependant, seuls un mathématicien et un physicien n'ont pas confondu le rayon avec le diamètre.

Intéressons-nous aux réponses incorrectes : nous en devons la quasi totalité à une mauvaise traduction de l'énoncé en langage mathématique. Par contre, un mathématicien justifie sa réponse d'une manière nous paraissant intéressante :

On ne trouvera pas de point d'arrivée ; le processus entamé est infini.

A priori, ce dernier ne conçoit pas qu'un processus infini (une série) puisse engendrer un résultat fini. Pour vérifier nos suppositions, regardons en vis-à-vis quelle fut sa réponse à la question sur le paradoxe de Zénon :

> *Dans son raisonnement, Zénon fait appel à une série. Il peut pousser son raisonnement à l'infini, mais la distance parcourue, qui est la somme des parties de trajets, est un nombre fini.*

Il sous-entend ici qu'un résultat fini peut être obtenu d'un processus infini. Le changement de cadre a ainsi provoqué des réactions inverses.

En conclusion, cette première question nous a permis de constater qu'aucun étudiant ne refuse la notion d'infini potentiel – aucun n'exprime qu'un processus illimité n'a pas de sens. De plus, cette question met en lumière l'*a priori* suivant : *un processus infini ne peut engendrer un résultat fini.* Ces constats sont-ils similaires pour la seconde question ?

<u>Question 2 : Longueur parcourue par la spirale</u>

TABLE I - 2.10 – Tableau récapitulant la présence ou non d'infini potentiel dans la question concernant la longueur parcourue par la spirale

	Phys. (/11)	Math. (/11)
infini potentiel	5	7
infini actuel	1	1
les deux	3	3
aucun	2	0

Force est de constater que quatre physiciens et trois mathématiciens se sont abstenus de répondre. Parmi les justifications restantes, on remarque que l'infini potentiel est assez présent et que l'infini actuel fait son entrée. Divers exemples peuvent être cités pour chacune de ces catégories :

- Infini potentiel : $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi}{i}$; $\frac{2\pi \sum(rayons)}{2}$; $\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \cdots = 2\pi$,
- Infini actuel : *infini* ; *la longueur sera infinie*,
- Les deux : *longueur infinie car on ne s'arrêtera jamais* ; $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k} = +\infty$; $\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \cdots$ *on ajoutera toujours quelque chose donc on va tendre vers* $+\infty$,
- Aucun : *même raisonnement que Zénon* ; $S = 2\pi(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^m})$.

La TABLE I - 2.11 résume le nombre de bonnes et de mauvaises réponses. En ce qui concerne les bonnes, seuls deux mathématiciens ont parfaitement développé leur raisonnement et trouvé le résultat attendu :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\pi = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \pi \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} (\frac{1}{2})^n = \pi \frac{1-0}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi$$

Table I - 2.11 – Tableau récapitulant le nombre de bonnes réponses à la question de la longueur de la spirale

	Phys. (/11)	Math. (/11)
correct	2	5
incorrect	8	6
aucun	1	0

On constate également que le taux de mauvaises réponses est assez élevé : la plupart rapporte que la longueur du chemin est infinie (quatre physiciens sur les huit et quatre mathématiciens sur les six). Ces réponses mettent en lumière l'*a priori* suivant : *un processus infini ne peut engendrer un résultat fini.* Il peut être intéressant de déterminer si le même préjugé émerge de leur réponse à la question concernant le paradoxe de Zénon. Nous distinguons ainsi trois catégories de réponses :

1. Ceux qui affirment que la flèche n'atteint pas sa cible (trois physiciens sur les quatre). Ceci nous pousse à croire que pour eux, un processus illimité ne peut engendrer un résultat fini. Le changement de cadre n'a pas modifié leurs préconceptions.
   Ex : [...] *On tend vers la cible en sommant des nombres qui deviennent de plus en plus petits. On atteint pas la cible mais on s'en rapproche.*
   Zénon oublie une autre notion en plus de la notion de distance, c'est celle du temps. A chaque « division », le temps que mettra la flèche pour parcourir la distance sera de plus en plus petit aussi. Donc, à terme, les temps que mettra la flèche pour parcourir les divisions qui tendent vers l'∞ tendront eux vers zéro. [...]

   Cet étudiant n'est pas le seul à émettre l'idée d'un éventuel infini temporel, ouvrant ainsi la voie à une potentielle question de recherche : l'existence d'un infini temporel en plus des deux types d'infini communément admis à l'heure actuelle, l'infini potentiel et l'infini actuel. Nous y reviendrons dans la conclusion de ce chapitre.

2. Ceux pour qui la flèche atteint sa cible (un mathématicien et un physicien sur quatre). Dans leur chef, un processus infini peut à la fois donner un résultat fini (deuxième fiche) ou non (quatrième fiche). Le changement de cadre les a clairement influencés.
   Ex : [...] *Pour atteindre sa cible, elle doit parcourir la moitié du chemin restant puis la moitié de la moitié et ainsi de suite et là elle atteindra sa cible si on additionne toujours les moitiés qu'elle a parcourues.*

3. Ceux dont la réponse à la question portant sur le paradoxe de Zénon ne nous aide pas (trois mathématiciens sur quatre).
   Ex : *Conclusion* (la flèche n'atteindra jamais sa cible) *pas correcte.*

Parmi les autres mauvaises réponses, nous aimerions relater la suivante : pour justifier son raisonnement, un étudiant a utilisé ce qu'il croyait être une propriété du cours portant sur la notion de convergence de série. Cependant, il en a inversé la thèse et l'hypothèse. Cette inversion soulève les questions suivantes : s'agit-il d'une erreur de distraction, d'un théorème mal étudié, ou encore d'une confusion entre les termes de « condition nécessaire », « condition suffisante » et « condition nécessaire et suffisante » ?

De cette analyse, nous pouvons tout d'abord conclure que plusieurs notions ne sont pas claires pour les étudiants : certains ne perçoivent pas qu'un processus infini peut amener à un résultat fini et un étudiant semble éprouver des difficultés à propos des concepts de conditions nécessaires et suffisantes. Ensuite, nous retenons l'idée d'un infini temporel en plus des deux types d'infini communément admis actuellement. En effet, il semblerait, pour certains les étudiants, qu'il y ait une différence entre l'infini potentiel et l'infini temporel. Enfin, nous constatons l'importance du changement de cadres effectué entre les fiches de questions 2 et 4 : les réponses des étudiants sont parfois tout autres, alors que le sujet des deux fiches est similaire. Les cadres utilisés, de la vie courante et géométrique, permettent tout deux de faire émerger les préconceptions erronées des étudiants. Nous ne pouvons toutefois pas affirmer qu'un cadre est à privilégier pour proposer nos situations dédiées à l'infini.

I - 2.2.5 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était d'analyser la perception de la notion d'infini qu'ont les étudiants de première année en mathématique ou physique par le biais d'un questionnaire se basant sur des notions mathématiques liées à l'infini. Il nous a permis de mettre en lumière plusieurs domaines pouvant mener à des investigations futures :

1. Les limites de fonctions/suites et leurs notions associées.
2. Les ensembles infinis dénombrables et non dénombrables.
3. Les représentations des nombres réels, en particulier, les nombres décimaux illimités.
4. L'existence d'un infini temporel : même si dans la catégorisation actuelle de l'infini (potentiel et actuel) il semblerait que l'infini temporel appartienne à l'infini potentiel, il apparaît, dans certaines réponses d'étudiants, l'envie de les dissocier. N'y aurait-il pas matière à débattre pour distinguer l'infini temporel du potentiel ?
5. Les séries et leur convergence.

C'est à ce dernier domaine que nous décidons de consacrer la suite de ce travail. Nous nous intéresserons en particulier à la question de recherche suivante :

> *Comment utiliser les conceptions à propos de l'infini pour introduire la notion de série ?*

La suite de ce travail se consacre donc à la mise en oeuvre d'une activité permettant d'introduire le concept de série en utilisant les résultats sur les conceptions à propos de l'infini.

Obstacles et difficultés liés au concept de série

Tout d'abord, certains étudiants ne conçoivent pas que derrière un processus illimité peut se cacher une réponse finie. Cet obstacle épistémologique est lié au développement historique des connaissances. En effet, ce genre d'erreur nous fait penser à la conclusion que tirait Zénon dans son paradoxe de la flèche et la cible (la flèche n'atteint pas sa cible).

Ensuite, quelques répondants inversent la thèse et l'hypothèse de la propriété 4. La question suppose de savoir si cette justification résulte d'une erreur de distraction, d'une erreur sur les conditions nécessaires et suffisantes ou enfin, d'une erreur sur les séries en elles-mêmes.

Propriété 4. *Si une série de terme général u_n converge*
Alors la suite (u_n) converge vers zéro.

Enfin, une confusion peut être envisagée sur base des définitions 8 et 9 ci-après.

Définition 8. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.*
On appelle série de terme général u_n le couple $((u_n),(S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ où la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, appelée suite des sommes partielles, est définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k := u_0 + u_1 + \cdots + u_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Les nombres réels u_n et S_n sont respectivement appelés $n^{\text{ième}}$ terme et $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de terme général u_n.
Une série est habituellement notée de la manière suivante : $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$

Définition 9. *La série de terme général u_n est dite convergente si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est convergente.*

Alors que c'est sur base de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'on observe la convergence de la série S (cfr définition 9), l'attention des étudiants est fortement attirée sur la suite de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, au vu de la notation utilisée pour les séries (cfr définition 8) : $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$. Ceci pourrait amener certains étudiants à se focaliser sur la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plutôt que sur celle de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Afin d'éviter ces potentielles confusions, il est important de souligner que deux suites interviennent dans la notion de série :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

où $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont ces deux suites.

L'analyse des réponses apportées au questionnaire par les étudiants nous a permis de dégager des conceptions préalables, à propos de la notion de séries, sur lesquelles il nous semble judicieux de revenir pour concevoir notre activité. Ainsi nous veillerons à insister sur les idées suivantes :

- un processus illimité n'engendre pas nécessairement un résultat infini,
- deux suites interviennent dans la notion de série,
- une série converge si et seulement si la suite des sommes partielles converge,
- si une série converge, alors la suite de terme général converge vers zéro (implication).

Chapitre I - 3

Analyse de l'enseignement usuel, de ses effets et du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation

Une fois la notion sur laquelle portera notre séquence de cours déterminée, penchons-nous sur les deux derniers points des analyses préalables : l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets ainsi que celle du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation.

I - 3.1 Analyse de l'enseignement usuel et de ses effets

Notre objectif étant de concevoir une séquence de cours abordant toutes les difficultés d'apprentissage inhérentes aux séries, penchons-nous sur les programmes de cours suivis jusqu'à présent par les étudiants de première année en baccalauréat de mathématique et de physique.

Dans un premier temps, observons le programme de cours de mathématique du troisième degré pour l'enseignement secondaire général et technique de transition, délivré par le ministère de la communauté française (2000, pp. 16, 31 et 38) : nous y trouvons un concept proche des séries, celui des suites. La Table I - 3.1 reprend les points de matières abordé en cinquième année, dans les cours de deux, quatre et six périodes.

Derrière le point de matière « Sommes de termes, limites associées » des quatre et six périodes, il est clair que la notion de série est implicitement abordée – une série n'étant rien d'autre que la limite de la suite des sommes partielles d'une autre suite.

TABLE I - 3.1 – Points de matière abordés sur base de la notion de suite en cinquième année selon le nombre de périodes

Nombre de périodes	Matières
6	Notion de suite de nombres. Suite arithmétique et suite géométrique. Sommes de termes, limites associées.
4	Construction de suites arithmétiques et géométriques. Sommes de termes, limites associées.
2	Etude comparée des progressions arithmétique et géométrique de raison r et de premier terme t_1 positif.

Dans un second temps, référons-nous aux tables des matières des cours suivis par les étudiants en premier baccalauréat en mathématique et physique de l'Université de Namur. Nous constatons que ces thèmes sont à nouveau rencontrés. Observons plus particulièrement le programme du cours d'*Analyse réelle 1* donné lors du premier quadrimestre (Winkin, 2014) : il aborde les thèmes de *sommes des termes des suites arithmétiques et géométriques et les limites associées* (vu lors de la cinquième secondaire) au deuxième chapitre, tandis que le troisième introduit les *séries numériques* (Winkin, 2014, pp. 10-48). La structure suivie est assez formelle, en témoigne par exemple, dans la partie relative à la convergence de suites, la définition 10 qui est suivie de quelques propriétés (Winkin, 2014, pp. 13-16) :

Définition 10. *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge (ou tend) vers le nombre réel* $l \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \ tq\ \ \forall n \geq n_\varepsilon,\ \ | x_n - l | < \varepsilon.$$

Unicité de la limite. *Toute suite convergente admet une seule limite.*

Bornitude. *Toute suite convergente est bornée.*

Critère de limite nulle. *Si la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers zéro et si la suite* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée,*
Alors la suite produit $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers zéro.*

Contrairement aux travaux dirigés (TD), les exemples et exercices sont peu courants dans les cours théoriques donnés à l'université. En cela nous pouvons affirmer qu'ils sont assez formels. Les séances pratiques sont idéalement programmées après que les étudiants aient abordé les concepts théoriques au cours magistral. La contrainte institutionnelle qui demande de dissocier les TD et le cours magistral comporte certains désavantages : un étudiant retiendra plus facilement un résultat trouvé par lui-même via un exercice qu'un résultat obtenu sans effort de sa part, comme c'est souvent le cas lors d'un cours théorique.

Ainsi, dans le cadre de notre activité introduisant les séries, nous « mélangerons » la théorie et les illustrations pour permettre aux étudiants de déduire certaines propriétés afin qu'ils s'approprient plus facilement la matière.

I - 3.2 Analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation

La mise en place de la séquence de cours concernant les séries se situe dans un contexte particulier. Comme mentionné précédemment, cette matière est abordée durant le premier quadrimestre et doit tenir compte de l'avancement du cours théorique et des TD. Nous sommes donc face à une contrainte d'ordre logique : les notions de *sommes de termes de suite et limites associées* doivent être vues avant notre introduction aux séries. Plus précisément, nous attendons des étudiants les pré-requis suivants :

Définition 11. *Une suite de nombres réels est une fonction définie sur l'ensemble des nombres entiers naturels* $\mathbb{N}$ *et à valeurs dans l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$. *La suite* $\mathbb{N} \to \mathbb{R} : n \mapsto x(n)$ *est désignée par* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou encore* (x_n), *si le contexte est clair, où* $x_n := x(n)$.

Définition 12. *La suite (ou progression) géométrique* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de premier terme* a *et de raison* r *se définit par :*

$$(x_n) = \begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = x_n \cdot r \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$ *et* $r \in \mathbb{R}$, *avec* $r \neq 0$.

Propriété 5. *La somme* S_n *des* n *premiers termes d'une suite géométrique de premier terme* a *et de raison* r *a pour propriété que :*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} x_k := x_1 + x_2 + \cdots x_n \\ &= \begin{cases} n \cdot a & si\ n = 1 \\ \\ \frac{a - x_n \cdot r}{1-r} & sinon \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 13. *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite convergente si elle admet une limite finie lorsque* n *tend vers l'infini. Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.*

Propriété 6. *Soit* $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, *où* $a \in \mathbb{R}$ *est un paramètre. On a*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & si\ -1 < a < 1 \\ 1 & si\ a = 1 \\ +\infty & si\ a > 1 \\ n'a\ pas\ de\ limite & si\ a \leq -1 \end{cases}$$

C'est sur base de ces différentes définitions, propositions, etc que nous allons concevoir notre séquence de cours. Comme constaté, aucune allusion au mot *série* n'est faite, le but étant d'introduire le sujet en mettant en lumière divers liens avec les suites. Il n'est donc pas nécessaire que les étudiants en aient entendu parler auparavant. Nous nous situons bien dans une situation a-didactique, l'intention d'enseigner les séries n'étant pas explicite.

Pour terminer, une dernière contrainte se dresse devant nous : trouver un moment disponible pour les mathématiciens et physiciens afin de réaliser notre activité sans empiéter sur le cours théorique ou sur les TD. Pour ce faire, nous décidons de la mettre en pratique lors d'un tremplin [1]. Notons que cette activité s'est déroulée avant que les étudiants n'aient vu le concept de série, mais elle peut aussi être utilisée après les premiers cours abordant ce thème. De plus, même si c'est en tremplin que nous avons choisi de proposer ce dispositif, il n'est pas exclu de l'utiliser durant un cours théorique ou en TD. Cependant, alors que durant ces cours plus magistraux les étudiants ont tendance à utiliser les outils vus pour répondre aux questions (contrat didactique), ce sont les conceptions préalables qui ressortent lors d'une séance de tremplin. Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, il est idéal de travailler sur les conceptions préalables des étudiants.

Malheureusement, nous étions dans l'obligation de proposer l'activité durant les seules plages horaires encore disponibles. Ainsi, l'ingénierie se réalisera au sein de deux groupes : un groupe composé des physiciens de première année, pendant deux heures, et un autre avec les mathématiciens durant une heure.

I - 3.3 Conclusion

Lors du chapitre précédent, nous avions convenu de mettre en oeuvre une activité introduisant le concept de série afin de pointer les difficultés couramment rencontrées par les étudiants de première année en mathématique ou en physique.

Le présent chapitre nous a tout d'abord permis de mettre en avant les matières liées au concept de série, nécessaires à son enseignement, et déjà abordées par les étudiants. Plus particulièrement, nous avons observé que les concepts de *suites* et de *limites associées* ont été abordés durant la cinquième secondaire et revus avant notre activité. Les étudiants ont donc tous les outils nécessaires pour appréhender les séries.

Ensuite, nous avons vu qu'il était intéressant de proposer notre activité lors d'une séance de tremplin afin de mettre en avant les conceptions préalables des étudiants. En effet, bien que le dispositif a sa place au cours théorique ou en TD, nous préférons que les étudiants répondent à nos questions de manière spontanée, et non en utilisant les théorèmes ou propriétés vus au cours, comme le suggère le contrat didactique.

Ce chapitre pointe enfin les obstacles se dressant devant nous pour mettre en oeuvre notre activité. En plus des contraintes d'ordre logique qui demandent que les concepts de *suites* et de *limites associées* soient vus avant notre introduction aux séries, nous nous trouvons face à une contrainte au moment de la mise en pratique du dispositif : le nombre d'heures disponibles. En conséquence, l'activité se donne au sein de deux groupes : un composé des physiciens de première année, pendant deux heures, et un autre avec les mathématiciens durant une heure.

1. Le tremplin est une séance de remédiation prévue pour les premières années afin que les étudiants puissent poser des questions ou demander de plus amples informations sur des points de matières abordés dans leurs différents cours.

Deuxième partie

Analyse a priori, expérimentation et analyse a posteriori

Chapitre II - 1

Conception et analyse a priori des situations didactiques de l'ingénierie

Nous avons vu que quatre étapes sont indispensables à la conception de l'ingénierie didactique proposée par Artigue. Alors que nous avons précédemment étudié la phase consacrée aux analyses préalables, il est à présent temps d'approfondir la deuxième, portant sur la conception de la séquence de cours. Rappelons que cette étape se subdivise en deux parties : une descriptive qui vise à exposer l'activité ainsi que les variables globales et locales choisies, et une prédictive portant sur le comportement des étudiants. Les étapes trois et quatre de l'ingénierie didactique proposée par Artigue seront quant à elles traitées dans les chapitres suivants.

II - 1.1 Motivations

Nous avons vu lors du chapitre précédent qu'il était intéressant de proposer notre activité lors d'une séance de tremplin afin de mettre en avant les conceptions préalables des étudiants. En effet, bien que notre dispositif a sa place au sein d'un cours théorique ou en TD, nous préférons que les étudiants répondent à nos questions de manière spontanée, et non en utilisant les théorèmes ou propriétés vus au cours, comme le suggère le contrat didactique. Nous pouvons dès lors observer l'importance de se baser sur les préconceptions initiales des étudiants lors de l'introduction aux séries.

Idéalement, le professeur utilise les conceptions préalables de l'étudiant pour l'aider dans son apprentissage. Comme le dit Coménius (cité par Romainville, 2013-2014) :

> *L'arbre qui voit naitre ses rameaux ne les rejette pas, mais les fait se déployer. Il faut de même dans les écoles que l'ordre des études s'organise de telle sorte que ce qu'on enseigne s'appuie sur ce que l'élève sait déjà.*

Il est donc essentiel de faire émerger les idées préalables des étudiants afin d'éviter que les nouveaux savoirs ne soient simplement plaqués sur leurs anciennes connaissances. Pour ce faire, le professeur va proposer une situation d'apprentissage provoquant l'émergence des conceptions initiales des étudiants. Ce processus amène parfois l'apprenant à constater que ses anciennes stratégies s'avèrent inefficaces face à une situation donnée et à mesurer l'importance de les modifier. Dans certains cas, les connaissances antérieures de l'étudiant peuvent constituer un obstacle qu'il faut éliminer. Brousseau en distingue quatre types (1983, pp. 164-198) :

- *l'obstacle épistémologique* qui *est lié au développement historique des connaissances,*
- *l'obstacle ontogénique* qui est *lié au développement neurophysiologique de l'apprenant,*
- *l'obstacle didactique* qui est dû *aux choix d'enseignement,*
- *l'obstacle culturel* qui est dû à des *connaissances véhiculées par le contexte culturel.*

Les connaissances préalables entrainant de tels obstacles ne disparaissent pas toujours. Il arrive qu'elles persistent et resurgissent même après que l'étudiant ait accepté le nouveau système de connaissances.

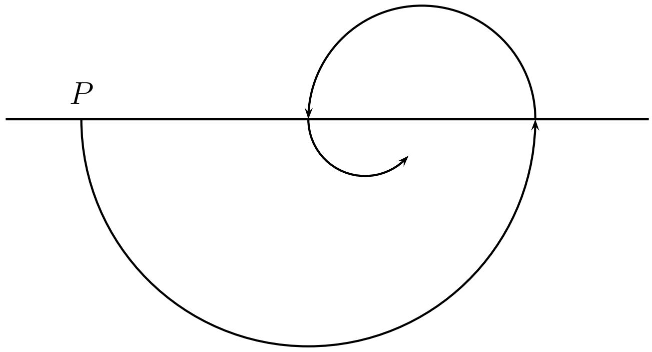
Ces considérations mettent en évidence l'intérêt que représente ce chapitre, qui s'attache à identifier les idées initiales des étudiants à propos de la notion de série par le biais d'une situation d'apprentissage.

II - 1.2 Description

Dans cette section, nous décrivons l'activité ainsi que les variables globales et locales choisies. La question reprise à la FIGURE II - 1.1 nous a permis de débuter le tremplin.

Question 1 : Une étrange spirale

D'un point de départ P d'abscisse 0, on suit une demi-circonférence de **rayon 1**, puis on suit une demi-circonférence de rayon $\frac{1}{2}$ (voyez le dessin) et ainsi de suite jusqu'à former autant de demi-circonférences que souhaité. Chacune d'entre-elles a donc un rayon égal à la moitié de celui de la demi-circonférence précédente.



Peut-on situer le point d'arrivée pour les demi-circonférences suivantes ? Si oui, quelle est la position de ce point pour chacune des demi-circonférences ?

Nombre de demi-circonférence(s)	Existence	Position
1		
2		
3		
4		
5		
8		
10		
50		
100		
n		
et si on ne s'arrête pas ?		

FIGURE II - 1.1 – Question proposée au tremplin introduisant le concept de séries

II - 1.2.1 Description de la question

Pour concevoir cette question, nous nous sommes basée sur celle posée dans le questionnaire de juin 2014, en y apportant quelques modifications. Tout d'abord, nous avons introduit un tableau grâce auquel les étudiants peuvent directement appréhender le lien existant entre chaque nombre de demi-circonférence (un naturel) et la position de la spirale (un réel) : l'ensemble des positions constitue ainsi une suite [1]. Cette dernière jouera le rôle de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Lors du cours, nous attirerons l'attention des étudiants sur le fait que dans cette suite intervient une autre : celle de terme général notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous l'appellerons suite des distances orientées. Nous y reviendrons en détails dans la suite de ce chapitre.

Ensuite, nous décidons de passer par l'intermédiaire de divers nombres de demi-circonférences avant d'en venir à la question « et si on ne s'arrête jamais ? ». Ces nombres ont été choisis de sorte qu'à un moment donné, les étudiants manifestent l'envie de trouver une formule générale afin de calculer la position de la spirale. Pour les influencer dans cette direction, nous avons également demandé la position de la spirale après n demi-circonférences, ce qui leur permettra aussi de trouver la position de la spirale « si on ne s'arrête jamais » (en faisant tendre le nombre de demi-circonférences n vers l'infini). Travailler de cette façon nous permet d'utiliser des concepts que les étudiants connaissent déjà sans utiliser la notion de série.

Enfin, pour ne pas influencer les étudiants, nous décidons de leur demander de compléter une colonne dans laquelle ils expriment leur avis concernant l'existence ou non du point d'arrivée suivant le nombre de demi-circonférences.

Selon nous, la façon dont est conçue notre question amène plusieurs avantages : en nous plaçant dans un cadre géométrique, elle permet de visualiser, sur base d'un exemple, le fait que dans la notion de série interviennent deux suites ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Pour résoudre le problème donné, le passage à un cadre analytique est nécessaire. De plus, la question a été conçue dans l'objectif d'amener les étudiants à exprimer leurs préconceptions sur les liens unissant les suites et les séries. Elle s'avère également idéale pour aller à l'encontre des difficultés éprouvées par les étudiants de l'année précédente, en abordant les thèmes suivants :

- un processus illimité n'engendre pas nécessairement un résultat infini,
- deux suites interviennent dans la notion de série,
- une série converge si et seulement si la suite des sommes partielles converge,
- si une série converge, alors la suite de terme général converge vers zéro (implication).

II - 1.2.2 Description des variables globales et locales

Dans cette section, nous décrivons les variables globales et locales utilisées pour chacun de nos groupes. La TABLE II - 1.1 reprend les variables globales choisies selon qu'il s'agisse du tremplin pour les mathématiciens ou pour les physiciens.

1. Contrairement à l'année précédente, les étudiants n'ont pas encore vu le concept de série. Par contre, à ce stade de leur cursus, ils savent ce qu'est une suite.

Table II - 1.1 – Description des variables globales selon le tremplin de physique et de mathématique

Variables globales	Physique	Mathématique
Type de cours ou d'activité	Cours ni théorique, ni d'exercices. Réflexion par groupe et mise en commun.	Cours ni théorique, ni d'exercices. Réflexion individuelle et mise en commun.
Contrat entre le maitre et l'étudiant	Le maitre attend des réponses spontanées, voire erronées, des étudiants	Le maitre attend des réponses spontanées, voire erronées, des étudiants
Type d'évaluation	Formative	Formative

Au vu du temps accordé aux deux sections (une heure chez les mathématiciens, deux heures pour les physiciens), les réflexions (phase de dévolution) à propos de la question posée sont individuelles (et courte) d'une part et en groupe de l'autre. La tâche du professeur durant cette phase est de répondre aux éventuelles questions et d'aider les étudiants en demande. Lors de la mise en commun, il attend des réponses spontanées, voire erronées afin de prendre connaissance des conceptions préalables des étudiants.

L'évaluation, quant à elle, est de type formative. Nous pouvons en résumer les caractéristiques par le biais de la Table II - 1.2 (Charlier, 2013-2014) :

Table II - 1.2 – Caractéristiques d'une évaluation formative

Quand ?	Pourquoi ?	Pourquoi faire ?	Quoi ?	Comment ?
• Début ou pendant l'apprentissage	• Pour réguler l'apprentissage	• Informer l'élève et l'enseignant sur l'apprentissage • Proposer des remédiations	• Pour déceler les difficultés au niveau des acquisitions ou méthodes de travail	• Analyser les démarches d'apprentissage • Interpréter les difficultés, les erreurs (ex. d' outils : questionnaire)

En effet, l'ingénierie se déroulant alors que les apprenants étudient les suites, et les séries n'étant rien d'autres que des limites de suites, nous pouvons considérer que le tremplin se place **pendant** l'apprentissage. De plus, le but de l'activité étant de faire émerger les conceptions préalables (erronées) et de **déceler et interpréter** les difficultés des étudiants afin de les aider à y remédier, nous nous trouvons dans de la **régulation** d'apprentissage.

Nous pouvons à présent passer aux variables locales. Rappelons que ces dernières se divisent en deux groupes : l'un concernant l'organisation de la séance et l'autre concernant les caractéristiques de la tâche. Dans le premier figurent les variables suivantes :

1. Discours de l'enseignant (présentation de la séance, de l'activité et de ses buts) : l'objectif de la séance n'a pas été clairement expliqué aux étudiants. Nous avons parlé d'un tremplin d'introduction au prochain cours *d'Analyse Réel I* pour ne pas employer le mot *série*.
2. Travail sur des connaissances acquises ou nouvelles : nous travaillons d'une part sur des connaissances acquises, les suites, et d'autre part sur de nouvelles, en introduisant le concept de séries.
3. Découpage de la séance (travail individuel, en groupe) :
   - Moment de réflexion (phase de dévolution) individuel ou en groupe.
   - Mise en commun des idées (phase d'institutionnalisation).
   - Mise au clair : la suite des positions comprend une autre suite, celle des distances orientées (cfr partie prédictive) afin d'aborder les séries (définies par deux suites).
   - Évocation des sommes infinies.
   - Demande de conjectures des étudiants afin d'en vérifier la validité ou non par le biais d'exemples ou contre-exemples.

Les variables locales prennent aussi en compte les caractéristiques de la tâche : les informations à traiter, les outils et matériaux disponibles et la présentation de la tâche. Ces éléments ayant été abordés précédemment, nous n'irons pas plus loin dans cette description.

Maintenant que la question de notre activité est décrite, tout comme les variables globales et locales choisies, nous pouvons tenter de prédire certaines conjectures dont les étudiants pourraient nous faire part et d'imaginer comment les valider ou non.

II - 1.3 Prédictions

En supposant que le tableau de la FIGURE II - 1.1 soit complété, cette section donne des prédictions quant aux éventuelles conjectures dont les étudiants pourraient nous faire part, et décrit des exemples et/ou contre-exemples qui pourraient les conforter ou non dans leurs intuitions. Pour cela, observons les résultats obtenus après que le tableau de la FIGURE II - 1.1 ait été rempli :

- La suite des distances orientées peut s'écrire comme :

  $$(u_n) = 2\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$$

  où u_n ($n \in \mathbb{N}$) représente la distance orientée parcourue par le point P à la $n^{\text{ième}}$ demi-circonférence. Notons que le terme de distance orientée est employé pour faire référence au fait que le point P puisse avancer et reculer. En effet, au vu de l'énoncé de la question à la FIGURE II - 1.1, on observe qu'après la première demi-circonférence ($n = 1$), la spirale avance de deux unités ($u_n = 2\left(\frac{-1}{2}\right)^{1-1} = 2$) ; après la deuxième par contre, elle recule d'une unité ($u_n = 2\left(\frac{-1}{2}\right)^{2-1} = 2\left(\frac{-1}{2}\right) = -1$).

– La suite des positions peut s'écrire comme :

$$(S_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

où S_n ($n \in \mathbb{N}$) représente la position du point P à la $n^{\text{ième}}$ demi-circonférence. Cette position s'obtient en sommant toutes les distances orientées nécessaires pour atteindre la $n^{ième}$ demi-circonférence. Par exemple, pour déterminer la position du point après trois demi-circonférences, il suffit d'additionner les distances parcourues après la première, la deuxième et la troisième demi-circonférence : $2+(-1)+\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

– La série de terme général u_n peut s'écrire comme :

$$S = \lim_{n\to\infty} (S_n)$$

La série S donne la position du point après une infinité de demi-circonférences (lorsqu'on ne s'arrête pas).

On considère ensuite que les étudiants ont découvert, avec notre aide, les convergences suivantes :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro. En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{4}{3}$. En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (S_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^i \\ &= 2 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-1}{2}\right)^i \qquad \text{série géométrique} \\ &= 2 \lim_{n\to\infty} \left(1 \cdot \left(\frac{1-(\frac{-1}{2})^n}{1-(\frac{-1}{2})}\right)\right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

3. La série S converge vers $\frac{4}{3}$ (évident).

Sur base de ces découvertes, nous pensons que les étudiants vont émettre quelques suppositions quant aux liens existants entre la convergence, d'une part, d'une série et d'autre part, des suites de terme général et de sommes partielles associées. Pour nous y préparer au mieux, nous avons imaginé ce à quoi ils pourraient penser et comment valider ou non leurs conceptions.

II - 1.3.1 Conjectures relatives à la suite alternée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas alternée, la série de terme général u_n diverge

Les étudiants peuvent penser que la convergence de la série (traduit ici par la position qui est fixe et qui vaut $\frac{4}{3}$ après une infinité de demi-circonférences) résulte dans le fait que la suite des distances orientées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée (le signe change pour chaque élément de la suite).

Pour contrecarrer cette idée, imaginons que la spirale ne voyage pas de façon alternée sur l'axe horizontal de la FIGURE II - 1.1 mais qu'elle progresse toujours vers l'avant en prenant par exemple la suite

$$(u_n) = \left(\frac{1}{10}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Ainsi, après une demi-circonférence, la spirale avance de $\frac{1}{10}$ d'unité ; après la deuxième, elle avance de $\frac{1}{100}$ d'unité et ainsi de suite. A la limite, la suite des distances va converger vers zéro, comme dans le premier cas lorsque nous avions

$$(u_n) = 2\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Sur base de la nouvelle suite de distances, la suite des sommes partielles, à savoir, la suite des positions, peut s'écrire comme :

$$(S_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^i \qquad (n \in \mathbb{N})$$

A la limite, on constate que cette suite donne un résultat égal à $\frac{10}{9}$ (détails épargnés au lecteur). Il en sera de même pour la série S. Ainsi, les étudiants ont un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non alternée qui entraine la convergence de la série de terme général u_n. Nous trouvons dans l'*Annexe C* une proposition de question mettant en scène ces deux suites.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée, alors la série de terme général u_n converge

Sur base de l'exercice présenté lors du tremplin, les étudiants peuvent penser qu'une série sera toujours convergente si sa suite de terme général est alternée. Pour aller à l'encontre de cette idée, prenons la suite

$$(u_n) = (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Représentons graphiquement quelques valeurs prises par cette dernière :

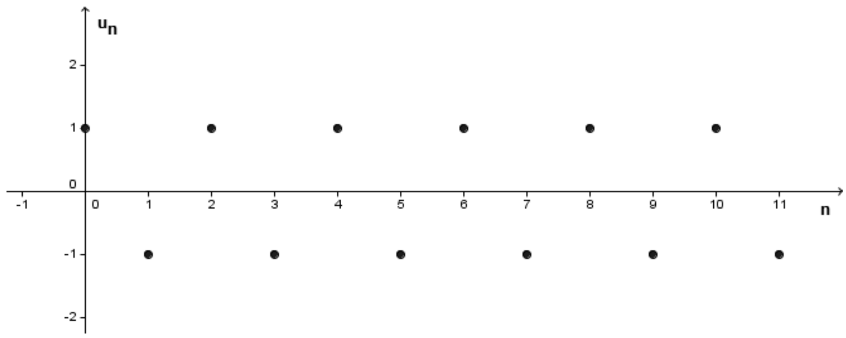


FIGURE II - 1.2 – Représentation graphique de la suite alternée $(u_n) = (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})$

En observant le graphique, on constate que la suite ne converge pas vers une valeur fixe puisque les éléments de la suite alternent entre les valeurs de 1 et de -1. A la limite, on ne peut déterminer la valeur prise par la suite, tout comme la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit d'une telle suite (respectivement série) qu'elle est divergente. Ainsi, cet exemple met en avant une série divergente dont la suite de terme général est alternée.

L'introduction de cet exemple dans le tremplin permet également d'attirer l'attention sur une propriété importante des sommes infinies : elles ne sont pas associatives. En effet, supposons qu'on puisse écrire la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} u_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \end{aligned}$$

Comme nous l'avons étudié dans la première partie de ce travail (chapitre I - 1), la série peut avoir pour résultats zéro, un ou un demi, selon la manière dont on regroupe les termes. Les sommes infinies ne sont donc pas associatives. Même si elle facilite l'écriture, on évitera la notation « $\sum\limits_{i=0}^{\infty}$ », les propriétés habituelles d'addition n'étant pas respectées.

II - 1.3.2 Conjectures relatives à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro, alors la série de terme général u_n converge

Certains étudiants peuvent penser que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniquement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro. Jusqu'à présent, les exemples rencontrés étaient tels que cette conclusion pouvait être tirée. Afin de contrer cette idée, partons de la série suivante :

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{i}\right)$$

Nous pouvons en tirer ces observations :

1. La suite $(u_n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge vers zéro ($n \in \mathbb{N}$). En effet,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \ln(1+0) = 0\end{aligned}$$

2. La suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ divergent. En effet,

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \ln(2) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\\ &= \ln\left(\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots n\cdot(n+1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots(n-1)\cdot n}\right)\\ &= \ln(n+1)\\ S &= \lim_{n\to\infty} S_n\\ &= \lim_{n\to\infty} \ln(n+1)\\ &= \infty\end{aligned}$$

Ainsi, les étudiants ont un exemple de série divergente dont la suite de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit diverger pour que la série de terme général u_n diverge

Au vu des exemples précédents, il est possible que les étudiants aient cette préconception. En effet, avec la suite de terme général $(u_n) = (-1)^n$, ($n \in \mathbb{N}$), alternée et divergente, nous avons obtenu une série de terme général u_n divergente également. L'exemple suivant permet d'aller à l'encontre de cette idée :

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a \qquad (a \in \mathbb{R}^0)$$

Dans ce cas, remarquons que :

1. La suite $(u_n) = a$ converge vers a, une constante ($n \in \mathbb{N}$).

2. La suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ divergent. En effet,

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{i=1}^{n} a\\ &= \underbrace{a+a+a+a+\cdots+a}_{(n+1) fois}\\ &= (n+1)\cdot a\\ S &= \lim_{n\to\infty} S_n\\ &= \lim_{n\to\infty} (n+1)\cdot a\\ &= \infty \qquad (a \neq 0)\end{aligned}$$

Nous sommes donc en présence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un réel (autre que zéro) et d'une série qui diverge. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne doit pas obligatoirement diverger pour que la série de terme général u_n diverge.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers zéro, alors la série de terme général u_n diverge

Les divers exemples utilisés précédemment nous mènent tout naturellement à cette conclusion, qui peut, cette fois, être validée. En effet, pour tout naturel n, nous avons montré que :

1. La suite $(u_n) = a$ $(a \neq 0)$ converge vers ce réel a (ne converge donc pas vers zéro). La série de terme général u_n diverge.
2. La suite $(u_n) = (-1)^n$ diverge (ne converge donc pas vers zéro). La série de terme général u_n diverge.

De plus, grâce à l'exemple de la série

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{i}\right)$$

qui diverge mais dont la suite de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro, nous pouvons affirmer que nous sommes face à une condition nécessaire mais non suffisante. Si les étudiants nous font part de cette conjecture, nous leur préciserons qu'elle fait en réalité l'objet d'une propriété du cours d'*Analyse réelle I*, comme nous l'avions remarqué dans le deuxième chapitre de la première partie (cfr I - 2.2.5).

II - 1.4 Conclusion

Ce chapitre commence par présenter une description de notre activité. Comme nous venons de le voir, la manière dont elle a été conçue amène plusieurs avantages : tout d'abord, le fait de nous placer dans un cadre géométrique permet de visualiser les deux suites ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$) qui interviennent dans la notion de série. Ensuite, elle permet d'aborder le thème de série sans que les étudiants en aient entendu parler auparavant. Enfin, elle s'avère idéale pour aller à l'encontre des difficultés éprouvées par les étudiants de l'année précédente, en abordant les thèmes suivants :

- un processus illimité n'engendre pas nécessairement un résultat infini,
- deux suites interviennent dans la notion de série,
- une série converge si et seulement si la suite des sommes partielles converge,
- si une série converge, alors la suite de terme général converge vers zéro (implication).

Nous trouvons également dans ce chapitre une description des variables locales et globales choisies. Celle-ci permet de rendre compte des différences de mise en oeuvre du dispositif au sein des deux groupes[2]. Une phase de réflexion en groupe a été possible pour les étudiants de première année en physique, tandis qu'elle fut individuelle pour les étudiants en mathématique.

2. Rappelons que l'activité s'est déroulée durant une période d'une heure pour les mathématiciens et de deux heures pour les physiciens.

Pour terminer, nous trouvons dans ce chapitre des prédictions quant aux éventuelles conjectures dont les étudiants pourraient nous faire part, ainsi qu'une description d'exemples et/ou contre-exemples qui pourraient les conforter ou non dans leurs intuitions. Nous avons ainsi imaginé les suppositions que peuvent nous soumettre les étudiants après la résolution de la question de départ :

– si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas alternée, la série de terme général u_n diverge ;
– si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée, alors la série de terme général u_n converge ;
– si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro, alors la série de terme général u_n converge ;
– la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit diverger pour que la série de terme général u_n diverge ;
– si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers zéro, alors la série de terme général u_n diverge.

Sur base de ces potentielles conjectures, nous avons conçu des exemples permettant de réfuter les quatre premières.

Chapitre II - 2

Expérimentation

Après avoir abordé les deux premiers points de l'ingénierie didactique proposée par Artigue – analyses préalables et conception de la situation didactique – passons maintenant à la troisième étape qui consiste à tester notre activité. L'objectif de ce chapitre est ainsi de décrire sa mise en oeuvre lors d'un tremplin destiné aux premières années mathématique ou physique.

II - 2.1 Informations

II - 2.1.1 Informations d'ordre pratique

Rappelons que nous avions demandé certains pré-requis avant la mise en place de notre activité afin de faciliter le déroulement du tremplin. Ces derniers sont énoncés dans la section I - 3.2.

En ce qui concerne le déroulement du tremplin, les informations dont il faut tenir compte sont les suivantes :

– Date du tremplin : 29 octobre 2014.
– Sections visées : 13 étudiants en première année de mathématique et 12 en physique.
– Temps de l'expérimentation pour les physiciens : deux heures (de 9h35 à 10h45).
– Temps de l'expérimentation pour les mathématiciens : une heure (de 11h45 à 12h45).
– Matériel : aucun matériel particulier.
– Support : *Annexe C*.

Il faut également savoir qu'après cette activité, le cours de théorie et les TD ont abordé les séries. De plus, les premières années en mathématique ont pu approfondir ce thème grâce à un travail de groupe qui leur a été proposé dans le cadre du cours d'*Analyse Réelle I*.

II - 2.1.2 Méthode de récolte des données

Nous avons filmé à l'aide d'un Ipad la mise en commun des idées de chacun des étudiants lors des deux séances de tremplin. Toutefois nous n'avons pu exploiter correctement la vidéo de notre expérimentation avec les mathématiciens. En effet, diverses contraintes se sont dressées devant nous avant de pouvoir commencer la séance :

– temps nécessaire pour passer d'une séance de tremplin à l'autre,
– attribution d'un mauvais local,
– temps de recherche d'un nouveau local.

Dans la précipitation, l'Ipad fut mal enclanché sur la fonction « vidéo », en conséquence de quoi nous n'avons pas enregistré les premières minutes du cours.

II - 2.2 Différentes phases du tremplin

Le tableau ci-dessous reprend les différentes phases de l'activité ainsi que les rôles dédiés à l'enseignant et aux étudiants.

Table II - 2.1 – Description des phases du tremplin ainsi que des rôles dédiés à l'enseignant et aux étudiants

Phases	Rôle de l'enseignant	Rôle des étudiants
Phase 1 : Dévolution du problème	Demander aux étudiants de lire l'énoncé, de le comprendre.	Lire l'énoncé et poser des questions concernant sa compréhension.
Phase 2 : Réflexion par groupe ou individuelle	Observer les réponses des étudiants et les inciter à laisser des traces de leurs essais. Proposer de l'aide.	Débuter la résolution du problème. Echanger, discuter de solutions et stratégies.
Phase 3 : Mise en commun et réflexion sur les séries	Orchestrer le débat en agençant dans un ordre précis les diverses productions. Demander aux étudiants les outils utilisés et les raisons ayant présidé à leur choix.	Ecouter les groupes et l'enseignant. Exprimer, décrire leurs solutions. Poser des questions.
Phase 4 : Conjectures	Valider ou non les conjectures données par les étudiants à l'aide d'exemples ou contre exemples.	Faire part de leurs idées quant aux liens potentiels entre les convergences de suites et de séries.
Phase 5 : Conclusions	Conclure sur les points importants à retenir.	Participer et écrire les éléments retenus de l'activité.

Nous diviserons l'analyse des deux expérimentations sur base des quatre derniers points. Selon les sections, le temps accordé aux différentes phases varie :

– phase 1 : 5 minutes chez les physiciens et 2 minutes chez les mathématiciens,
– phase 2 : 46 minutes chez les physiciens et 5 minutes chez les mathématiciens,
– phase 3 : 47 minutes chez les physiciens et 35 minutes chez les mathématiciens,
– phase 4 : 15 minutes chez les physiciens et 5 minutes chez les mathématiciens,
– phase 5 : 7 minutes chez les physiciens et 3 minutes chez les mathématiciens.

II - 2.3 Déroulement du tremplin pour les physiciens

Afin de déterminer les éléments sur lesquels insister lors d'une future utilisation de cette activité, nous décidons de relater uniquement les difficultés rencontrées par les étudiants durant les différentes phases de celle-ci [1].

II - 2.3.1 Réflexion par groupe

Difficultés

Rappelons qu'il était demandé aux étudiants de remplir un tableau notifiant les positions d'un point P se situant sur une spirale en fonction du nombre de demi-circonférences effectuées par cette dernière (cfr FIGURE II - 1.1). Le début du tableau fut rempli facilement et les étudiants ont rapidement manifesté l'envie de généraliser la position du point P en fonction du nombre de demi-circonférences. Une difficulté est alors survenue : ils ne visualisaient pas la façon d'écrire plus généralement les positions.

Solution

Suggérer d'analyser comment se comporte la spirale entre chaque position : la plupart des groupes nous répondant que la spirale avançait ou reculait, nous leur demandions de traduire cela mathématiquement. Certains en sont arrivés à la conclusion que les positions pouvaient être écrites de la façon suivante :

TABLE II - 2.2 – Suggestion sur la façon de remplir le tableau de l'énoncé de l'activité du tremplin

Nombre de demi-circonférence(s)	Existence	Position
1	oui	2
2	oui	1=2-1
3	oui	$\frac{3}{2} = 2 - 1 + \frac{1}{2}$

1. Les étudiants ont été répartis en trois groupes de quatre.

II - 2.3.2 Réflexion collective

Déroulement général

Une fois les difficultés surmontées dans la phase réflexive, il fut plus aisé pour les étudiants de généraliser les positions, en témoigne la réponse de l'un d'entre-eux :

Après n demi-circonférences, la position de P est : $\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{i-2}}$

Ils posent ainsi le constat qu'un lien existe entre le nombre de demi-circonférences (un naturel) et la position du point P (un réel) et tirent la conclusion qu'ils sont face à une suite (application de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$), que nous décidons d'appeler S_n :

$$\begin{aligned}(S_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} &\to \mathbb{R}\\ n &\mapsto S_n\end{aligned}$$

Un dialogue s'installe alors entre nous et l'étudiant ayant mentionné la formule :

– [Enseignant] : Puisque tu dis que $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{i-2}}$ est une suite, n'y a-t-il pas une manière de trouver directement nos solutions pour la position ?
– [Etudiant 1] : C'est le premier terme moins le dernier terme fois la raison, divisé par un moins la raison.
– [Enseignant] : Pourquoi peux-tu dire cela ? Tu utilises quelle propriété ?
– [Etudiant 1] : Somme des suites en progression géométrique.
– [Enseignant] : Ce serait quoi ici ta suite en progression géométrique ?
– [Etudiant 1] : C'est $\frac{(-1)^{i+1}}{2^{i-2}}$

Pour valider son intuition, nous regardons si la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_i = \frac{(-1)^{i+1}}{2^{i-2}}, \forall i \in \mathbb{N}$$

rencontre les caractéristiques d'une suite géométrique (ce qui est le cas). Ainsi, nous ajoutons une quatrième colonne au tableau de départ pour montrer qu'à chaque nombre de demi-circonférences peut être associé un terme de la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Il reste à déterminer ce que représente cette suite :

– [Enseignant] : Si on fait le lien avec la spirale, que représentent les u_i ?
– [Etudiant 2] : Un diamètre. A chaque fois on part d'un point puis on fait 2-1+$\frac{1}{2}$,...
– [Enseignant] : C'est le fait d'avancer et de reculer alors. On pourrait appeler cela des *distances orientées*, c'est-à-dire, une distance où soit j'avance, et dans ce cas là on a des « + », soit je recule, et dans ce cas là on a des « - ».

Nous sommes donc face à deux suites : celle des distances orientées $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et celle des positions du point P, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, nous constatons que cette dernière, définie par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{i-2}} = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

est la somme des n premiers termes de la suite géométrique $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Les étudiants ont ainsi mentionné la formule à utiliser pour additionner les n premiers termes d'une suite géométrique, ce qui nous a permis de réexprimer les positions pour la $n^{\text{ième}}$ demi-circonférence comme

$$S_n = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$$

En demandant quelle est la position du point P dans une situation où la spirale ne s'arrête pas, un étudiant suggère l'utilisation du concept de limite (ce que les autres approuvent également). Ainsi, nous obtenons la position suivante :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) = \frac{4}{3}$$

Enfin, conclure qu'avec ce processus infini (le point P avance, recule, avance, et ainsi de suite) on obtient une position fixe pour le point P, nous permet d'introduire le concept de série : $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Changement de règles

Dans le cas de la spirale, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge, tout comme la suite de terme général $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Pour aller plus loin dans ce tremplin, nous avions besoin d'autres suites, tout en continuant à travailler avec les concepts de distances orientées et de positions. Ainsi, nous avons modifié l'énoncé de départ afin que la spirale se déplace d'une distance orientée donnée par la formule

$$u_i = (-1)^i$$

L'objectif de ce changement de règle est triple :

1. Constater que la suite de terme général $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est divergente, tout comme la suite des sommes partielles.
2. Amener la non associativité des sommes infinies et le concept de série.
3. Amener des conjectures quant aux liens existants entre la convergence des suites $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec celle de la série S, pour les différents cas exposés.

Explicitons ces différents points :

1. Le premier n'a pas posé de problème chez les physiciens, qui ont constaté que le résultat du $n^{\text{ième}}$ terme (après n demi-circonférences) allait dépendre de la parité de i dans le cas de la suite $((u_i)_{i\in\mathbb{N}})$, et de la parité de n pour la suite $((S_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Les étudiants, se rendant compte que le point P oscillait entre les positions -1 et 0, ont conclu qu'il était impossible de déterminer à la limite la position du point P ainsi que la distance parcourue par le point P, impliquant ainsi la divergence des suites $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Après avoir pris la notation suivante pour S :

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i$$

nous avons montré le « danger » de réexprimer la série comme nous serions tenter de le faire intuitivement, à savoir :

$$S = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

En effet, nous avons regroupé les termes de trois façons différentes (en supposant qu'on puisse le faire sans jamais s'arrêter) afin d'obtenir trois résultats pour S : 0, 1 et $\frac{1}{2}$. Ces constatations nous ont permis de conclure que la propriété d'associativité ne se rencontrait plus dans le cas des sommes infinies.

Nous avons également insisté sur le fait qu'utiliser la notation suivante

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$$

signifie simplement « limite pour n qui tend vers l'infini de la somme des n premiers termes de la suite de terme général $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ». Nous avons aussi noté que cette écriture permet de mettre en avant les deux suites qui interviennent dans une série : $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Deux suites étant nécessaires pour travailler avec les séries, nous décidons de demander aux étudiants si, selon eux, des liens existent entre la convergence de la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et celle de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ces conceptions sont détaillées dans le point suivant.

Difficultés

Aucune difficulté ne fut remarquée lors de cette phase collective. De plus, les étudiants n'ont pas posé de question de compréhension sur le concept de suite.

II - 2.3.3 Conjectures

Afin de mettre au jour les conceptions préalables des étudiants à propos des séries et les potentielles difficultés rencontrées, nous leur avons demandé d'exprimer leurs conjectures sur base des deux exemples donnés précédemment :

– Cas de la spirale : $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{4}{3}$.
– Cas du changement de règles : $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ne converge pas et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Difficultés liées aux conjectures

Les étudiants en première année de physique ont exprimé les conjectures suivantes :

1. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
2. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers n'importe quelle valeur finie.

Ces dernières, fausses, devaient être réfutées. Pour y parvenir, nous nous sommes servi, entre autres, des exemples préparés à la section II - 1.3.

Solutions

Pour réfuter la seconde préconception, nous avons simplement fait appel à l'intuition des étudiants, en témoigne le dialogue suivant :

– [Enseignant] : Si $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre, ça vaut dire qu'à chaque fois je vais ajouter la même valeur. Donc par exemple, arrivé à S_{14000}, je vais prendre les 14000 premiers termes de la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et chaque fois les additionner. Si par exemple pour $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ j'ai toujours 28282828, je vais ajouter à chaque fois 28282828 à mes distances orientées. Autrement dit, la position va aller loin.
– [Etudiant 1] : Donc ça ne converge pas, ça va à l'infini.
– [Enseignant] : Exact, quand on va vers l'infini, ce n'est pas converger.

Pour la première par contre, l'intuition ne suffit plus. Ayant prédit dans le chapitre précédent que cette idée pouvait survenir, nous avons utilisé l'exemple suivant pour la contrecarrer :

$$(u_i)_{i\in\mathbb{N}} = \ln\left(1+\frac{1}{i}\right)$$

A nouveau, nous avons stipulé aux étudiants que la règle définissant les distances orientées changeait mais que le principe ne variait pas du précédent. Comme nous l'avons montré dans la section II - 1.3, cette suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro alors que la suite

$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{i}\right)$$

diverge. Ce contre exemple permet d'affirmer que la conjecture énoncée par les étudiants est incorrecte.

II - 2.3.4 Mise au point sur l'activité avec les physiciens

Le tremplin des physiciens touchant à sa fin, divers points doivent être clarifiés :

1. Attirer l'attention des étudiants sur le fait qu'en inversant la thèse et l'hypothèse de la première conjecture, on obtient une propriété fortement utilisée dans le chapitre des séries.

   – [Enseignant] : C'est une condition qui est nécessaire mais pas suffisante, c'est-à-dire, si la limite de S_n existe, alors la suite de terme général converge vers 0. Mais il n'est pas vrai que si la suite de terme général converge vers 0 alors la suite des positions va converger. Ça peut être vrai, mais ça peut être faux. On utilise très souvent la contraposée : si les u_i ne convergent pas vers 0, alors vous êtes certains que vous n'aurez pas de convergence pour la position finale quand n tend vers l'infini.

2. Attirer l'attention des étudiants sur la notation à adopter pour spécifier une série.

   – [Enseignant] : Soit une suite de sommes partielles S_n, si la limite des S_n quand n tend vers l'infini existe et est finie, alors on appelle ça une série et on la note
   $$S = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$$
   Plus précisément, on parle de série de terme général u_i. Ce n'est pas parce qu'on la définit ainsi qu'il faut oublier qu'il y a deux suites : la suite de

terme général u_i et la suite des sommes partielles S_n. Vous pouvez associer les u_i aux distances orientées et les S_n aux positions où on a additionné toutes les distances orientées jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ étape.

3. Attirer l'attention des étudiants sur les bonnes questions à se poser lorsqu'on travaille avec le concept de série.

   – [Enseignant] : La série, c'est se poser la toute dernière question dans la case « Qu'en est-il quand n tend vers l'infini ? ». Existe-t-elle ? Est-elle finie ? Si oui, alors la série converge, sinon elle diverge.

II - 2.4 Déroulement du tremplin pour les mathématiciens

Ce tremplin s'est déroulé très différemment du précédent : le temps de réflexion, individuel uniquement, ayant duré quelques minutes à peine, nous en sommes directement venue à la mise en commun. Pressée par les délais à respecter, nous avons mené le cours afin d'aborder plus rapidement les points que nous désirions exposer.

Globalement, les notions abordées furent les mêmes dans les deux sections. Nous expliciterons d'ailleurs uniquement les différences entre les tremplins, le déroulement du second étant quasi similaire au premier (mis à part une moindre mise en activité préalable des étudiants).

II - 2.4.1 Réflexion collective : différences avec les physiciens

Nous avons rapidement insisté sur le fait que deux suites interviennent dans la notion de série et qu'en être conscient est essentiel afin d'éviter les erreurs classiques. Plus particulièrement, l'accent a été mis sur le peu de lien existant entre la convergence d'une suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec celle de la série de terme général u_i, alors même que cette dernière se note

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i$$

Nous avons également souligné que la notation suivante ne permettait qu'une simplification dans l'écriture de la série.

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$$

– [Enseignant] : On travaille vraiment avec deux suites même si on va dire que la série est une limite quand n tend vers l'infini de la somme des u_i. Si j'écris les choses comme ceci (on montre $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i$ au tableau), je ne vois qu'une seule suite, que $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et c'est le danger car vous vous focalisez alors dessus. Quand on va vous demander si S existe et est finie – elle n'existe que quand la limite pour n qui tend vers l'infini de S_n existe et est finie – vous ne voyez que u_i et vous vous dites, « Est-ce que la limite pour u_i existe ? ». Mais non [...]. La convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a presque rien à voir avec la convergence de la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Je dis presque [...].

La dernière phrase établit directement la transition entre cette partie et les conjectures des étudiants, qui nous permettent de déterminer les liens qu'ils établissent entre les convergences des deux suites ($(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

II - 2.4.2 Conjectures

Nous avons uniquement retrouvé la première conjecture donnée par les physiciens (la limite pour S existe et est finie si la limite de la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vaut zéro). Nous nous sommes donc servi du même exemple pour contrecarrer cette idée en tentant en plus une nouvelle approche :

> – [Enseignant] : Le point P, quand il va se déplacer, à un moment donné, il va avancer un tout petit peu, puis encore un tout petit peu, encore un peu [...]. On avance de tous petits morceaux : ça va tendre vers zéro (la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge donc bien vers zéro). Pourtant, rappelez-vous, on travaille avec des sommes infinies. Ces petites distances, à terme, ça fait quand même quelque chose. On voit bien que la limite de $\ln(1+\frac{1}{i})$ quand n tend vers l'infini, ça donne l'infini. Donc la position, finalement (la limite de S_n), même si je dis au point d'avancer d'une toute petite distance, ne sera pas convergente. Je vais aller vers l'infini.

II - 2.4.3 Mise au point sur l'activité avec les mathématiciens

Le tremplin avec les mathématiciens touchant à sa fin, divers points doivent être clarifiés :

1. Attirer l'attention des étudiants sur l'importance des informations relatives à la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et non pas de $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, pour émettre des conclusions quant à la converge de la série.

   > – [Enseignant] : Il ne suffit pas de regarder la convergence de mes u_i pour avoir des renseignements sur la convergence de ma série, de la position. Autrement dit, on peut vous donner des distances orientées qui peuvent valoir pratiquement zéro mais au total, la position, elle, va quand même continuer à bouger.

2. Attirer l'attention des étudiants sur le fait qu'en inversant la thèse et l'hypothèse de la conjecture, on obtient une propriété fortement utilisée dans le chapitre des séries.

   > – [Enseignant] : La suite de terme général de ma série converge vers zéro est une condition nécessaire pour avoir la convergence de la série, mais ce n'est pas une condition suffisante. Il ne suffit pas que la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro pour avoir la convergence de la série.

3. Attirer l'attention des étudiants sur le fait que deux suites interviennent dans la notion de série.

II - 2.5 Conclusion

L'objectif du présent chapitre était de décrire la mise en oeuvre de notre activité introduisant les séries lors d'un tremplin destiné aux premières années en mathématique ou physique.

Comme nous le savons déjà, le temps accordé à l'activité pour les mathématiciens était deux fois moindre que pour les physiciens. En conséquence, les difficultés rencontrées ont différé d'une section à l'autre. En effet, on remarque que les physiciens ont été mis en difficulté lors de la généralisation de la position de point P de la spirale (cfr II - 2.3.1), ce que nous n'avons pas observé chez les mathématiciens. Ce constat est tout à fait normal étant donné que la phase réflexive était de courte durée pour les étudiants de cette section.

En ce qui concerne la phase de réflexion collective, aucune différence n'est à constater entre les deux sections. En effet, d'un côté comme de l'autre, le concept de suite a été rapidement suggéré par les étudiants, ce qui nous a permis d'avancer facilement dans la résolution du problème posé ainsi que d'introduire la notion de série.

Le processus suivi pour amener les étudiants à nous faire part de leurs conjectures quant aux liens existants entre la convergence d'une série et la convergence des deux suites qui interviennent dans cette série ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$) fut le même dans les deux sections : résolution du problème posé puis utilisation d'une autre suite de terme général ($(u_n)_{\mathbb{N}}$) afin d'en observer la convergence ainsi que celle de la série de terme général u_n.

Suite à cela par contre, les conjectures des étudiants n'ont plus été les mêmes. Selon les physiciens :

1. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
2. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers n'importe quelle valeur finie.

Les mathématiciens, quant à eux, n'ont mentionné que la première idée. Nous pouvons supposer qu'il en aurait été autrement si les étudiants avaient bénéficié de plus de temps pour réfléchir à d'autres conjectures. Nous nous sommes donc servie d'un seul exemple préalablement élaboré (cfr II - 1.3.2) pour réfuter les préconceptions dans les deux sections.

Lors de la conclusion des deux séances, nous avons attiré l'attention des étudiants sur le fait qu'en inversant la thèse et l'hypothèse de la première conjecture, on obtenait une propriété fortement utilisée dans le chapitre des séries. Nous avons également attiré leur attention sur les points suivants :

- la notation à adopter pour spécifier une série (somme infinie),
- l'importance des informations relatives à la convergence de la suite des sommes partielles, et non pas de la suite de terme général, pour émettre des conclusions quant à la convergence de la série,
- deux suites interviennent dans la notion de série.

Chapitre II - 3

Analyse a posteriori et évaluation

Pour rappel, quatre étapes sont indispensables à la conception d'une ingénierie didactique au sens d'Artigue – les analyses préalables, les analyses a priori et la conception de l'ingénierie, l'expérimentation et enfin, l'analyse a posteriori. Les trois premières ayant été abordées précédemment, tirons à présent des conclusions quant à l'utilité de notre activité. Ce chapitre comprend deux parties dont la première, analyse a posteriori, se penche sur l'influence du dispositif sur la compréhension des étudiants au sujet des séries. La seconde, l'évaluation, confronte l'analyse a priori et l'analyse a posteriori en vue de proposer d'éventuelles modifications.

II - 3.1 Analyse a posteriori

Afin de déterminer le bilan de l'activité introduisant le concept de série pour les premières années en mathématique ou physique, nous avons élaboré un questionnaire (*Annexe D*) se subdivisant en trois parties. La première, destinée aux étudiants n'ayant pas participé à l'activité, comprend des questions relatives aux raisons de leur absence afin de savoir si des améliorations doivent être apportées ultérieurement. La deuxième s'adresse aux participants au tremplin et reprend des questions de compréhension sur les thèmes abordés, sur l'utilité de l'activité et sur la nécessité ou non de la réitérer. Enfin, la dernière partie, commune à tous, comporte des questions de compréhension générale à propos des séries afin de mettre en évidence les différences de réponses entre les participants à l'activité et les autres.

L'étude des réponses se divise selon ces trois grandes parties. Notons que nous tirerons une conclusion générale au terme de cette analyse afin de ne pas l'alourdir de bilans intermédiaires.

Le questionnaire se base sur les différents points ayant posé problème l'année précédente :

- un processus illimité n'engendre pas nécessairement un résultat infini,
- deux suites interviennent dans la notion de série,
- une série converge si et seulement si la suite des sommes partielles converge,
- si une série converge, alors la suite de terme général converge vers zéro (implication).

Notons que cinquante-et-un étudiants ont répondu à ce questionnaire dont trente physiciens (douze ayant participé à l'activité) et vingt-et-un mathématiciens (treize présents au tremplin). Il faut également savoir qu'après notre activité, mais avant de répondre à ce questionnaire, le cours de théorie et les TD ont abordé les séries. De plus, les premières années en mathématique ont pu approfondir ce thème grâce à un travail de groupe qui leur a été proposé dans le cadre du cours d'*Analyse Réelle I.*

II - 3.1.1 Les étudiants n'ayant pas assisté au tremplin

Question 1 et 2 : Quelles en sont les raisons ? Aurais-tu aimé y assister ? Pourquoi ?

1. But des deux questions :

Prendre en compte les éléments empêchant les étudiants d'assister au tremplin et recenser ceux qui auraient aimé y assister afin de mettre en avant l'importance ou non de la prise en considération de ces raisons.

2. Réponses des étudiants à la première [1] et deuxième question [2] ainsi que l'analyse :

Table II - 3.1 – Nombre d'étudiants, selon les différentes raisons recensées, qui n'ont pas assisté à l'activité

	Mathématiciens (/7)	Physiciens (/18)
Pas intéressé	1	2
Horaire incompatible	3	8
Comprend habituellement le cours	2	2
Ne comprendrait de toute façon rien	/	1
Autres	1	7

La principale raison de l'absence des étudiants à l'activité, dans les deux sections, résulte dans l'incompatibilité de leur horaire avec celui du tremplin. On peut supposer que, dans le cas contraire, le nombre de participants aurait été plus élevé. Cette idée se confirme lors de l'analyse des réponses à la deuxième question (cfr Table II - 3.2) : la plupart des étudiants aurait aimé y participer (nombre de « oui » élevé).

Beaucoup de physiciens ont également coché la case « Autres », qu'ils justifient par :

> *Je préfère consacrer du temps pour étudier autre chose. Je suis bisseuse. Horaire trop matinal. Je dormais. Autre activité le mercredi matin.*

La réponse de deux d'entre-eux peut être associée à la catégorie « Horaire incompatible ».

Comme sus-mentionné, la plupart des étudiants souhaitaient découvrir notre activité (cfr Table II - 3.2). Parmi les principales raisons énoncées par les étudiants, on trouve le fait que la séance aurait pu être bénéfique pour comprendre le cours d'*Analyse Réelle* :

1. Pour cette question, on constate une abstention chez les mathématiciens. De plus, plusieurs réponses ont parfois été données par un même étudiant.
2. Pour cette question, on constate deux abstentions chez les mathématiciens et quatre auprès des physiciens.

C'est toujours ça en plus pour comprendre le cours. Car j'ai des difficultés en analyse. Pour comprendre certaines subtilités sur les séries qui restent obscures pour moi.

TABLE II - 3.2 – Nombre d'étudiants selon les différentes justifications recensées qui regrettent, ou non, ne pas avoir participé à l'activité

	Mathématiciens (/6)			Physiciens (/14)			
Réponses	Oui (5)		Non (1)	Oui (10)			Non (4)
Thèmes des justifications	Approche différente	Aide pour le cours	Pas d' intérêt	Approche différente	Aide pour le cours	Pas sur place	Pas d' intérêt
	1	4	1	1	6	2	4

En ce qui concerne les réponses négatives, les étudiants s'accordent à dire que, de manière générale, les tremplins ne les intéressent pas.

Je ne trouve pas que les tremplins apportent quoique ce soit au cours. Aucun intérêt particulier. Je préfère faire quelque chose de plus utile pour moi.

Peu d'étudiants se situent dans cette catégorie, ce qui nous encourage à penser qu'il est judicieux de proposer ce tremplin. En ce qui concerne les autres réponses, tant du côté des mathématiciens que des physiciens, nous ne trouvons aucune justification liée à leur choix.

II - 3.1.2 Les étudiants ayant assisté au tremplin

Question 1 : Penses-tu que cela t'a aidé à mieux comprendre le concept de série ? Pourquoi ?

1. But de la question

Déterminer l'utilité qu'a eu l'activité auprès des étudiants des deux sections.

2. Réponses des étudiants et analyse[3] :

Sur base de la TABLE II - 3.3, nous constatons que le tremplin a fortement aidé les physiciens, un peu moins les mathématiciens. Les justifications des réponses positives à cette question sont similaires aux deux sections : l'activité apporte une meilleure visualisation de suites et séries, une distinction claire de ces différents concepts ainsi que des exemples concrets auxquels raccrocher la théorie abstraite. Par contre, la justification « recherche » – sous-entendant que les étudiants ont eu la possibilité de chercher par eux-mêmes la solution au problème posé – n'est mentionnée que par les physiciens. Ceci peut s'expliquer par le peu de temps accordé à l'animation du groupe de mathématiciens, ce qui constitue d'ailleurs, selon nous, un élément explicatif du grand nombre de réponses négatives de leur part à la question. Attardons-nous sur ces réponses afin de comprendre en quoi l'activité ne les a pas aidés à comprendre le concept de série. Nous retrouvons deux types de justifications :

3. Treize mathématiciens et douze physiciens ont assisté au tremplin.

- Pas fait de lien : trois étudiants affirment n'avoir pas fait le lien entre le cours théorique et le tremplin. Dans le cas contraire, nous imaginons que la séance aurait pu les aider.
- Pas assez de bagage : deux étudiants sont convaincus qu'ils ne disposaient pas de connaissances théoriques suffisantes pour aborder le tremplin :

  On a commencé sans vraiment avoir de bases sur les séries ; j'aurais préféré avoir le tremplin après avoir commencé ce chapitre. Quand je suis arrivée au cours sur cette matière, j'ai été larguée ; j'ai été relire la feuille de tremplin sans qu'elle puisse m'aider, c'est en retravaillant mon cours que j'ai pu comprendre la différence entre les suites et les séries.

TABLE II - 3.3 – Nombre d'étudiants justifiant selon les différents thèmes recensés en quoi l'activité les a aidés, ou non

	Mathématiciens (/13)						Physiciens (/12)				
Réponses	Oui 7			Non 5		Pas totalement 1	Oui 11				Pas totalement 1
Thèmes des justifications	Visualisation 3	Voir les nuances entre concepts 2	Exemple 2	Pas fait de lien 3	Pas assez de bagage 2	/ 1	Visualisation 2	Voir les nuances entre concepts 1	Exemple 4	Recherche 2	/ 1

Question 2 : L'activité introduisant les notions de position et de distance orientée t'a-t-elle aidé(e) à comprendre le concept de série lors du cours théorique ? Si c'est le cas, en quoi t'a-t-elle été utile ?

1. But de la question :

Déterminer si l'aide apportée aux étudiants (question 1) résulte dans l'utilisation des suites de positions et de distances orientées afin de constater l'utilité d'y avoir recours.

2. Réponses des étudiants et analyse [4] :

Les réponses affirmatives n'expliquent pas en quoi les suites de distances orientées et de positions ont été utiles (les étudiants expriment simplement en quoi l'activité les a aidé, comme pour la première question). En ce qui concerne les réponses négatives, il est impossible de déterminer si l'exemple introductif doit être modifié ou non, aucune justification ne nous éclairant. De plus, une grande majorité de physiciens s'est abstenue de répondre.

Question 3 : [Pour les mathématiciens] : L'activité introduisant les notions de position et de distance orientée t'a-t-elle aidé(e) à comprendre le concept de série lors du travail de groupe ? Si c'est le cas, en quoi t'a-t-elle été utile ?

1. But de la question :

Déterminer la mesure dans laquelle les informations reçues lors du tremplin ont été utilisées pour la réalisation du travail de groupe [5] portant sur la notion de série dans le cadre du cours d'*Analyse Réelle I* (ont-ils procédé avec des suites de positions et de distances orientées ?,. . .).

2. Réponses des étudiants et analyse [6] :

Table II - 3.4 – Nombre de mathématiciens justifiant, selon les différents thèmes recensés, en quoi l'activité les a aidés, ou non, durant le travail de groupe

	Mathématiciens (/12)		
Réponses	Oui (3)		Non (9)
Thèmes des justification	Aide visuelle (2)	Principe similaire à la spirale (1)	Non mais ça aurait pu (2)

Comme nous le constatons, seuls trois mathématiciens ont affirmé que le tremplin les avait aidés pour le travail de groupe. Selon deux d'entre-eux, ce fut pour des raisons visuelles :

> *Car meilleure visualisation. On a utilisé les notations de positions pour mieux visualiser des questions.*

Sur les neuf réponses négatives, seuls deux étudiants ont justifié leur choix. Ils s'accordent à dire que le tremplin aurait pu les aider s'ils l'avaient utilisé :

> *Non je n'y ai pas pensé, mais de là à dire qu'elle était inutile, je ne pense pas étant donné qu'elle m'a aidé à comprendre en gros le concept de série. Non mais je pense qu'avec plus de compréhension de l'activité, ça aurait pu.*

4. Pour cette question, on constate une abstention chez les mathématiciens et cinq chez les physiciens.

5. Le département de mathématique de l'Université de Namur organise chaque année un travail de groupe relatif aux cours d'*Analyse Réelle* pour les premiers baccalauréats en mathématique. Afin de vérifier l'adéquation des réponses des étudiants à nos questions avec leur production lors des travaux de groupe, nous les survolons dans l'*Annexe E* de ce travail.

6. Pour cette question, on constate une abstention chez les mathématiciens.

Question 4 : Lors de ce tremplin, nous avons abordé différents thèmes. L'un d'eux portait sur les sommes infinies. Qu'en as-tu retenu ?

1. But de la question :

Le thème des sommes infinies ayant été abordé dans les deux sections, nous souhaitons identifier ce que les étudiants en ont retenu. Plus précisément, l'objectif est de déterminer si les étudiants perçoivent que les propriétés habituelles d'addition ne s'appliquent pas dans le cas des sommes infinies, ou encore, que les sommes infinies permettent une simplification au niveau de l'expression d'une série.

2. Réponses des étudiants et analyse :

TABLE II - 3.5 – Nombre d'étudiants mettant en avant ce qu'ils ont retenu des sommes infinies selon les différents thèmes

	Mathématiciens (/7)	Physiciens (/4)
« Les sommes infinies, c'est dangereux »	3	2
« Les sommes infinies peuvent donner un résultat fini »	1	2
« Les sommes infinies sont des notations pour les séries »	2	/
Autre	1	/

Constatons tout d'abord le nombre d'abstentions particulièrement élevé : huit (sur douze) chez les physiciens et six (sur treize) pour les mathématiciens. Tirer des conclusions pertinentes s'avère dès lors compliqué. Face à ce constat, deux hypothèses s'offrent à nous : soit les étudiants ont oublié cette partie du tremplin, soit ils n'ont pas compris la question, auquel cas, nous aurions dû être plus explicite.

Ensuite, remarquons que les première et troisième justifications sont en adéquation avec nos attentes. On trouve par exemple les justifications suivantes :

> *Il est dangereux de faire des sommes infinies. On ne peut pas les manipuler comme des sommes classiques.*
> *Une somme infinie n'est pas une bonne appellation du concept de série.*

Nous supposons que ce dernier étudiant sous-entend par là que malgré le fait qu'on utilise une somme infinie pour noter la série, elle est en réalité la limite de la suite des sommes partielles d'une autre suite. Il traduirait donc cela par le fait qu'une série n'est pas une somme infinie.

Enfin, en ce qui concerne le deuxième type de justification, on observe une évolution par rapport aux étudiants de l'année précédente – beaucoup d'entre-eux répliquaient qu'un processus infini engendrait un résultat infini, ce qui n'est pas le cas ici.

> *Ce n'est pas parce que la somme est infinie que la limite de la série l'est.*
> *Les sommes infinies ne valent pas toujours l'infini.*

Question 5 : Penses-tu que cette activité devrait être réitérée les années suivantes ? Explique.

1. But de la question :

Déterminer si les étudiants pensent que cette activité est utile pour les futures premières années et le cas échéant, en connaitre les raisons.

2. Réponses des étudiants et analyse :

Si quatre physiciens se sont abstenus de répondre, aucune réponse négative n'est à déplorer. Les principales raisons avancées par les étudiants à répondre positivement sont les suivantes (seuls trois mathématiciens et un physicien ne se sont pas justifiés) :

1. Utile avant la théorie : *Recevoir une explication avant le cours peut toujours être utile. On a moins de réticence à l'approche de la matière.*
2. Utilisation d'exemples : *Voir la matière avec des exemples aide à comprendre. C'est un bon moyen d'introduire les concepts de manière plus ludique et plus rapide.*
3. Aide pour tout le chapitre : *Ça éviterait que d'autres confondent les séries et les sommes infinies et ça éclaircirait le chapitre*[7]*. Cela devrait nous aider un peu plus avec la matière.*

Question 6 : Si c'est le cas, quelle est, selon toi, la meilleure place pour proposer cette activité ?

1. But de la question :

Dans le cas où les étudiants sont favorables à ce que l'expérience soit réitérée les années futures, déterminer quand il serait, selon eux, judicieux de proposer l'activité : en tremplin, au cours théorique, en TD,... ?

2. Réponses des étudiants et analyse[8] :

Table II - 3.6 – Nombre d'étudiants proposant, selon les différents endroits possibles, un lieu pour réaliser l'activité

	Mathématiciens (/13)	Physiciens (/12)
Au cours théorique	4	1
En TD	4	3
En tremplin	7	4
Lors du travail de groupe	2	/

7. Nous supposons que l'étudiant sous-entend par là que malgré le fait qu'on utilise une somme infinie pour noter la série, elle est en réalité la limite de la suite des sommes partielles d'une autre suite. Il traduirait donc cela par le fait qu'une série n'est pas une somme infinie.

8. Remarquons que quatre physiciens se sont abstenus de répondre et que les mathématiciens ont parfois coché plusieurs propositions.

Notre activité a sa place, semble-t-il, lors d'une séance de tremplin, les autres suggestions remportant moins de succès. Aucune justification n'a été donnée pour cette question mis à part un mathématicien qui a confié qu'il préférait qu'à rythme si soutenu, l'activité soit donnée au cours théorique.

Question 7 : Si on décide de réitérer cette activité l'année prochaine, que faudrait-il améliorer selon toi ?

1. But de la question :

Déterminer les améliorations à apporter à cette activité dans le futur.

2. Réponses des étudiants et analyse :

TABLE II - 3.7 – Nombre d'étudiants qui suggèrent des améliorations à apporter à l'activité selon les différents thèmes recensés

	Mathématiciens (/13)	Physiciens (/5)
Rien	3	2
Allonger le temps	4	/
Faire un tremplin après la théorie	1	1
Mieux séparer les concepts	2	1
Plus approfondir l'introduction	3	1

Remarquons tout d'abord que sept physiciens se sont abstenus de répondre. Doit-on en déduire qu'ils estiment qu'aucune modification n'est nécessaire comme l'ont suggéré cinq répondants ? Ensuite, on constate que les réponses des deux sections divergent essentiellement au niveau du temps accordé à l'activité : il constitue l'élément principal à améliorer selon les mathématiciens, à l'inverse des physiciens qui n'ont formulé aucune remarque à ce sujet.

Enfin, d'autres améliorations ont été mises en avant par les étudiants :

– Proposer un autre tremplin après le cours théorique afin de dégager les liens entre ce dernier et notre activité, ce qui nous semble constituer une proposition pertinente à exploiter. Nous pourrions également envisager d'informer les chargés du cours théorique et des TD du contenu exact de l'activité pour qu'ils y fassent référence durant leur séance.

– Séparer plus distinctement les différents concepts : par exemple, un étudiant regrette le manque d'explications quant à la différence entre

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad et \quad \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Pour ce tremplin, notre volonté était que les étudiants se sentent libres de partager leurs préconceptions. De ce fait, aucune structure n'est apparue au tableau, les idées préalables des étudiants intervenant à des moments très différents. Au fur et à mesure qu'émergeaient les idées préalables des étudiants, nous avancions des exemples ou contre exemples tout en expliquant les nouveaux éléments rencontrés, ce qui explique le manque de structuration.

– Approfondir davantage l'introduction de la spirale : certains étudiants, ne la comprenant pas, ont très vite été perdus pour la suite de l'activité. Il est important de passer plus de temps sur cette introduction afin de construire les bases essentielles pour la suite de l'apprentissage.

II - 3.1.3 Partie commune

L'objectif de cette partie commune est double. D'une part, observer les différences entre les réponses des étudiants ayant participé à l'activité et les autres. D'autre part, constater, dans les réponses des étudiants, la présence de l'infini potentiel que sous-entendent les séries. Malheureusement, au vu de la formulation de nos questions qui utilise implicitement cette notion, nous ne pouvons exploiter les réponses des étudiants en terme d'infini potentiel, ceux-ci reprenant les éléments mentionnés dans la question pour rédiger leur réponse.

Question 2 : *Il n'existe aucun lien entre les suites et les séries.* Vrai ou faux ? Explique.

1. But de la question :

Lors du tremplin, nous avons mis en avant les deux suites qui interviennent dans une série ainsi que la façon de la représenter (somme infinie des termes de la suite de terme général). L'objectif de cette question est de déterminer si ces liens apparaissent dans les réponses des étudiants.

2. Réponses des étudiants et analyse [9] :

Table II - 3.8 – Nombre d'étudiants exprimant, selon les différents thèmes, les liens entre les suites et les séries

	Mathématiciens (/21)		Physiciens (/30)	
	Activité (/13)	Non activité (/8)	Activité (/12)	Non activité (/17)
Réponses	Faux(13)	Faux(8)	Faux(12)	Faux(17)
Lien général	1	/	3	5
Couple de suites	11	5	5	2
Somme infinie de termes d'une suite	/	1	/	1
Ambiguïté : somme infinie ou non ?	1	/	2	4
Confusion série et somme partielle	/	2	1	2
Autres	/	/	1	1

9. Notons qu'il y a une abstention chez les physiciens qui n'ont pas assisté au tremplin.

Remarquons que tous les étudiants sont conscients de l'existence d'un lien entre les séries et les suites. Dans la première catégorie de réponses (lien général), ils perçoivent ce lien mais n'en donnent pas de détails précis :

> *Par définition, les séries sont des cas particuliers de suites. Une série est définie grâce à une suite. Les séries sont définies grâce aux suites.*

Notons que parmi les neuf répondants relevant de cette catégorie, cinq n'ont pas assisté au tremplin.

La justification suivante, « couple de deux suites » domine chez les mathématiciens et physiciens ayant participé à l'activité, mettant ainsi en lumière l'utilité de celle-ci.

> *Les séries sont composées de deux suites (la suite de termes général et la suite des sommes partielles). Les séries [...] sont formées de deux suites* $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *avec* $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Deux étudiants, n'ayant pas pris part à notre séance, définissent une série comme étant une somme infinie de termes d'une suite (troisième catégorie). Aucun participant au tremplin n'a répondu de la sorte : nous supposons que ceci est lié à l'accent mis, durant l'animation, sur le fait que la somme infinie n'est qu'une notation pour exprimer la série.

La quatrième catégorie regroupe les étudiants pour lesquels il est difficile de distinguer s'ils perçoivent un processus infini derrière le concept de série :

> *Les séries infinies sont des sommes d'éléments de suites. Une série est une suite de la somme des termes de la suite. Une série est liée à une suite : elle est l'addition de termes de la suite.*

Il est possible que les étudiants confondent les séries et les suites de sommes partielles, comme tel est le cas pour cinq d'entre-eux (cinquième catégorie) :

> *Une série est une somme des n premiers termes d'une suite. Une série est une suite de sommes partielles d'une autre suite.*

Cependant, quatre de ces étudiants n'ont pas pris part à notre activité, ce qui nous encourage une nouvelle fois à croire en sa pertinence.

Question 3 : *Un processus infini ne peut qu'engendrer un résultat infini.* Vrai ou faux ? Explique.

1. But de la question :

Dans les réponses au questionnaire de juin 2014, certains étudiants affirmaient cet énoncé. L'objectif de cette question est ainsi de rendre compte de la part d'étudiants de l'année 2015 estimant ce même énoncé erroné.

2. Réponses des étudiants et analyse[10]

Onze étudiants s'étant abstenus, il nous faut analyser les réponses de quarante autres. Six étudiants (trois dans chaque section) affirment l'énoncé (cfr le nombre de « vrai »

10. Les « OK » et « KO » dans la TABLE II - 3.9 signifient que les justifications sont respectivement correctes et fausses.

dans la TABLE II - 3.9), soutenant qu'un processus infini ne peut engendrer qu'un résultat infini. Si ce nombre n'est pas négligeable, le manque de justifications ne nous permet pas d'affirmer qu'ils sont convaincus de leurs dires : la question fut peut-être mal lue.

TABLE II - 3.9 – Nombre d'étudiants justifiant, selon les différents thèmes recensés, le fait qu'un processus infini ne peut engendrer qu'un résultat infini, ou non

	Mathématiciens (/21)				Physiciens (/30)			
	Activité (/10)		Non activité (/8)		Activité (/9)		Non activité (/13)	
Réponses	Vrai (2)	Faux (8)	Vrai (1)	Faux (7)	Vrai (1)	Faux (8)	Vrai (2)	Faux (11)
Justification en terme de série-suite	/	OK :3	/	OK :4 KO :1	/	OK :3 KO :2	/	OK :4 KO :1
Justification en terme de limite	/	OK :2	/	OK :2	/	OK :2	/	OK :1
Autre	/	OK :2	/	/	/	OK :1	/	OK :1

Trente-quatre étudiants affirment que cet énoncé est erroné. Parmi les vingt-neuf s'étant justifiés (cfr. la TABLE II - 3.9), dix-huit utilisent les termes de suites et de séries dans leurs explications. Quatorze d'entre-eux justifient correctement leur choix :

> *Une série peut converger vers un nombre. Une suite peut très bien converger vers une valeur réelle, exemple* $(\frac{1}{n})$.

Quatre se sont trompés :

> Selon deux d'entre-eux : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1$.
> *Il se peut que ce résultat soit fini : exemple, quand on fait une somme infinie de termes qui convergent vers 0, cela converge vers un nombre fini.*

Ces deux dernières explications, données par deux étudiants n'ayant pas pris part à l'activité, utilisent, de manière erronée, des thèmes abordés en tremplin, ce qui nous pousse de nouveau à croire en la pertinence de notre dispositif.

Enfin, sept étudiants ont utilisé le concept de limite pour affirmer que l'énoncé est erroné (exemple : *on parle de limite à l'infini donc celle-ci peut très bien converger vers une valeur*). Quatre autres se sont servis de concepts bien différents comme en témoigne l'exemple suivant :

> *Si on divise un nombre n une infinité de fois pas un, le résultat sera toujours n. Si il y a un nombre réel majorant, alors le résultat ne sera pas infini.*

Question 4 : Une série convergente a : *toujours/parfois/jamais/autre* son terme général qui tend vers 0. Explique.

1. But de le question :

Cette question se base sur la proposition suivante : si une série de terme général u_n converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro.

Lors du questionnaire de juin 2014, nous avions rencontré l'inversion de la thèse et de l'hypothèse, ce qui explique notre insistance à ce sujet lors du tremplin. L'objectif de la question est de comparer les résultats des participants à l'activité à ceux des étudiants n'y ayant pas pris part afin de percevoir la connaissance de cette propriété dans les deux groupes.

2. Réponses des étudiants et analyse[11] :

Sur les cinquante réponses, vingt-cinq ont été justifiées par leur auteur et dix-huit d'entre-elles se basent sur la propriété énoncée plus haut (douze mathématiciens et six physiciens), en témoigne la TABLE II - 3.10. Les dix étudiants sélectionnant la réponse attendue, « toujours », utilisent en général correctement la propriété.

TABLE II - 3.10 – Nombre d'étudiants justifiant, selon les différentes propositions de réponses, la convergence de la suite de terme général vers zéro d'une série convergente

	Mathématiciens (/21)					Physiciens (/30)				
	Tremplin (/13)			Non tremplin (/8)		Tremplin (/12)		Non tremplin (/17)		
Réponses	Toujours (7)	Parfois (4)	Jamais (2)	Toujours (6)	Parfois (2)	Toujours (5)	Parfois (7)	Toujours (10)	Parfois (6)	Jamais(1)
Propriété	OK :5 KO :1	KO :2	KO :1	OK :2 KO :1	/ /	OK :1	/ /	OK :4	KO :1	/ /
Autre	/	/	/	/	2	1	1	2	1	/

Par contre l'inversion thèse-hypothèse est observée six fois (cinq mathématiciens et un physicien), essentiellement dans les catégories « parfois » et « jamais », en témoignent les « KO » dans la TABLE II - 3.10. Certains le justifient de la façon suivante :

Si $u_n \to 0 \Rightarrow \sum u_n$ *converge.*
Pour qu'une série converge, il faut que le terme général tende vers 0, par contre la réciproque est fausse

Au vu du peu de temps consacré à cette propriété durant les séances de tremplin (surtout en mathématiques – en témoigne le chapitre *Expérimentation* de ce travail). Il n'est pas étonnant que les étudiants commettent encore des erreurs à ce sujet.

11. Remarquons qu'un physicien n'a pas répondu à cette question.

Les autres justifications ont, dans la plupart des cas, été données par les physiciens. Attardons-nous sur deux d'entre-elles. Dans la première (justification d'un « parfois »), l'étudiant affirme que[12] :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \textit{ converge vers 0 (si } n \textit{ est pair) alors que } (-1)^n \textit{ diverge.}$$

Par son exemple, il veut justifier le fait qu'une série convergente a parfois une suite de terme général associée qui tend vers zéro, mais pas toujours. En effet, il pense montrer un exemple de série convergente (divergente en réalité) dont le terme général ne tend pourtant pas vers zéro (divergente ici). Outre cette erreur, l'explication de l'étudiant nous surprend : il parle de convergence de série (ce qui voudrait dire, dans son cas, que n doit tendre vers l'infini) tout en spécifiant que n doit être un nombre pair. Il ne semble pas percevoir le processus infini implicitement sous-entendu par le concept de série et semble confondre cette dernière avec la suite de sommes partielles.

Dans la seconde (justification d'un « toujours »), l'étudiant affirme que :

> *Lorsqu'une suite converge vers une valeur de 0, la série, càd l'aire des rectangles, est de plus en plus petite, donc converge aussi vers 0*

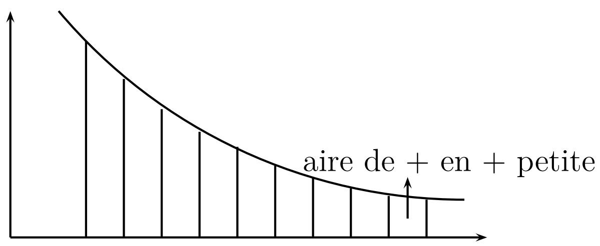


FIGURE II - 3.1 – Réponse d'un étudiant à la quatrième question de la partie commune du feedback

Cet étudiant, qui est le seul à utiliser le concept des intégrales impropres (dans tout le questionnaire), semble y lier automatiquement la notion de séries. Par son erreur, il met en évidence le risque de s'en tenir à une seule illustration sur laquelle s'appuyer dans la compréhension de la notion de séries.

Question 5 : Une série converge si : *la suite de terme général converge/la suite des sommes partielles converge/autre.* Explique.

1. But de cette question :

Les étudiants ont étudié en tremplin, au cours théorique, en TD et lors du travail de groupe (pour les mathématiciens) qu'il est nécessaire de se préoccuper de la convergence des suites de sommes partielles pour obtenir des informations sur la convergence des séries. Selon leurs prédécesseurs de 2014 qui se trompaient quant à la convergence de séries, une série converge si la suite de terme général converge. Nous désirons donc, au travers de cette question, vérifier si le constat est différent cette année.

12. Remarquons que cet étudiant n'a pas participé au tremplin, ce qui peut expliquer son erreur étant donné que cet exemple a justement été choisi lors de l'activité.

2. Réponses des étudiants et analyse :

Sur base de la TABLE II - 3.11, on constate que quarante-deux répondants sur quarante-neufs (abstention de deux mathématiciens) donnent la bonne réponse (suite des sommes partielles). Nous comptons seulement seize justifications, dont sept en lien avec la définition de convergence de série, en témoignent les deux suivantes :

La suite S_n doit converger pour que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.
Par définition.

TABLE II - 3.11 – Nombre d'étudiants justifiant la convergence de la série selon les différentes propositions de réponses

	Mathématiciens (/21)		Physiciens (/30)	
	Activité (/12)	Non activité (/7)	Activité (/12)	Non activité (/18)
La suite des sommes partielles	12	6	10	14
La suite de terme général	/	1	1	3
Autre	/	/	1	1

Cinq justifications sont ambigües à propos de la différence entre la suite des sommes partielles et la série. Notons que ce n'est pas la première fois que nous rencontrons cette ambiguïté.

La suite des sommes partielles d'une suite est une série. Une série correspond à la suite des sommes partielles.

Les quatre dernières justifications sont totalement autres que les précédentes.

Ensuite, cinq étudiants (un seul ayant assisté à notre activité) pensent que c'est sur la suite de terme général que l'attention doit être portée. Un seul a justifié sa réponse : *la série est composée du terme général ; s'il converge, la série converge.*
En observant ses explications à la deuxième question (lien entre les suites et les séries), on voit pourtant qu'il est conscient que la série est liée à la suite des sommes partielles : *les séries sont définies grâce aux suites ; par exemple, la somme des $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Enfin, on trouve deux physiciens dans la catégorie « Autre ». L'un, venu lors du tremplin, justifie ce choix en affirmant ceci :

Il faut que la suite de terme général et la suite des sommes partielles convergent.

Ce résultat nous surprend quelque peu. En effet, un exemple de suite des sommes partielles convergente (et donc de série convergente) et de suite de terme général divergente a été apporté lors de l'activité.

II - 3.2 L'évaluation de la séquence de cours

Pour être complet, la méthodologie d'ingénierie didactique proposée par Artigue suggère d'évaluer notre dispositif d'enseignement. L'objectif de cette dernière section est ainsi de confronter les analyses a priori et a posteriori de la séance. Pour ce faire, il nous faut répondre aux questions reprises ci-dessous (*Analyse a priori et a posteriori d'une séance*) par le biais d'une analyse des réponses des étudiants afin de dégager d'éventuelles pistes de modifications pour notre activité.

II - 3.2.1 Critères d'évaluation

1. L'objectif a-t-il été atteint ?

Notre objectif de départ était de sensibiliser les premières années baccalauréat mathématique et physique aux difficultés survenant dans le chapitre des séries. Lors des deux activités, nous avons introduit ce sujet sur base de divers exemples, en mettant en évidence les liens avec les suites et en tenant compte des conceptions préalables des étudiants.

Grâce au feedback, nous pouvons affirmer que nous avons atteint notre but : les étudiants ont été conquis par notre activité, en témoigne notamment leurs réponses à la première question de la section II - 3.1.2 : selon eux, l'activité permet d'une part, de mieux visualiser le concept de série et d'autre part de raccrocher la théorie à des exemples.

2. L'activité choisie parait-t-elle pertinente par rapport à cet objectif et aux compétences visées ?

Nous pouvons répondre affirmativement à cette question parce qu'elle permet d'établir des liens entre les suites et les séries de façon visuelle et concrète. De plus, en changeant quelque peu l'énoncé (autre définition de la suite des distances et des positions), nous avons la possibilité de travailler sur chaque préconception potentielle de l'étudiant. Cependant, en témoignent les réponses à la deuxième question de la section II - 3.1.2, nous ne disposons d'aucune information nous permettant de déterminer l'efficacité de cette introduction : même si aucune critique n'a été émise à ce sujet, est-il judicieux de se servir des suites de positions et de distances orientées ?

3. Les modalités de travail choisies étaient-elles adaptées ? Si non, expliquer pourquoi et indiquer un autre choix en justifiant.

- Concernant le choix du tremplin pour mettre en place notre activité, nous pouvons répondre affirmativement à la question. Les étudiants sont par ailleurs presqu'unanimes sur le fait de réitérer l'expérience lors d'un tremplin, en témoignent les réponses aux questions cinq et six de la section II - 3.1.2. De plus, la plupart des étudiants n'ayant pas assisté à notre introduction ont affirmé l'avoir regretté, signe que ce genre d'initiative est appréciée.

- Concernant les méthodes utilisées dans les deux sections (réflexion en groupe en physique et peu de temps de réflexion en mathématique), il semble préférable d'accorder deux heures à l'activité afin de laisser les étudiants réfléchir par eux-mêmes. Certains physiciens affirment avoir apprécié la phase de recherche alors que les mathématiciens regrettent le peu de temps accordé à la réflexion.

4. Quelles ont été les procédures utilisées (ou les réponses apportées) par les étudiants ? Etaient-elles attendues ? Et dans le cas contraire, pourquoi ?

Dans le cas des physiciens (réflexion préalable sans notre intervention), le concept de suite a vite été suggéré (ce que nous attendions) permettant d'amener facilement le concept de séries. Etant donné le peu de temps accordé dans l'autre section, nous avons rapidement dirigé les étudiants vers cette notion, ce qui ne nous permet pas de déterminer si l'idée aurait émergé d'elle-même. Ceci nous renforce dans notre projet d'accorder plus d'une heure à l'activité.

5. Quelles ont été les difficultés des étudiants ? Si elles étaient attendues, les aides étaient-elles suffisantes et sinon que peut-on mettre en place pour améliorer la situation ?

Nous pensions aux obstacles suivants :
– difficulté à percevoir qu'une série converge si et seulement si la suite des sommes partielles converge,
– difficulté à percevoir que la convergence de la suite de terme général n'est pas toujours une condition nécessaire à la convergence de la série (elle ne l'est que lorsque la limite de la suite de terme général est de zéro),
– difficulté à percevoir que, si une série de terme général u_n converge, alors la suite (u_n) converge vers zéro,
– difficulté à percevoir les différences entre les séries et les suites de sommes partielles,
– difficulté à percevoir l'idée d'infini potentiel derrière le concept de séries.

En ce qui concerne les deux premiers points, nous ne retirons que très peu d'informations du feedback, ce qui ne nous permet pas de percevoir si les étudiants ont intégré ces principes. Nous nous attendions à certaines préconceptions, telle l'inversion de la thèse et de l'hypothèse de la propriété relatée au troisième point. Malgré les aides apportées au tremplin, cette erreur est de nouveau apparue. Néanmoins, elle l'est plus dans le chef des mathématiciens (nous n'avons pas eu le temps de beaucoup insister sur cette mauvaise conjecture).

Nous étions également consciente des difficultés éprouvées par les étudiants à différencier la suite des sommes partielles et la série. Malgré l'activité, beaucoup semblent encore les confondre dans les réponses données lors du feedback. Cette erreur est peut-être due à un manque de précision dans leur justification.

En vue d'améliorer ces deux points, nous proposons deux modifications : d'une part, allonger le temps d'activité à deux heures et d'autre part, structurer plus clairement les différentes notions abordées. En effet, étant donné le caractère spontané (souhaité) de l'apparition des idées des étudiants, il est possible qu'une confusion soit née entre les différents concepts.

Enfin, nous souhaitions déterminer si les étudiants percevaient l'idée d'infini potentiel derrière le concept de série. Malheureusement, nous n'y sommes pas parvenue, les étudiants reprenant les éléments de l'énoncé dans leur réponse. Nous aurions donc dû formuler nos questions différemment pour que la notion d'infini potentiel n'y soit pas implicitement reprise.

8. Y-a-t-il eu des modifications par rapport au déroulement prévu concernant sa durée, ou les interventions de l'enseignant ? Quelles en ont été les raisons ? Faut-il modifier quelque

chose ?

Donner l'activité comme dans le cas des physiciens (en deux heures et par groupe) semble constituer la formule adéquate, à l'inverse du cas des mathématiciens (en une heure sans phase réflexive). De plus, étant donné le peu de temps accordé au deuxième groupe, nous sommes fréquemment intervenue, contrairement à l'autre section où les étudiants ont pu facilement faire part de leurs idées.

9. L'enseignant a-t-il personnellement rencontré des difficultés (gestion de temps, mise en œuvre, gestion des étudiants) ?

Non. Malgré le peu de temps pour les mathématiciens, la majeure partie de l'introduction a pu être donnée sans problème.

II - 3.2.2 Remarques supplémentaires

Afin de faciliter l'introduction aux séries, d'autres suggestions émises par les étudiants nous semblent judicieuses comme celle de proposer une autre activité, après le cours théorique sur les séries, afin d'établir les liens avec l'activité d'introduction.

En effet, comme nous l'avons remarqué, mettre en oeuvre l'activité lors d'un tremplin se révèle être bénéfique à l'émergence des préconceptions des étudiants. Dans le feedback, beaucoup se sont basés sur leurs idées préalables (même ceux ayant assisté au tremplin) alors même qu'ils ont, par exemple pour les mathématiciens, utilisé les notions adéquates dans le travail de groupe. Ce constat démontre la pertinence d'une activité supplémentaire dont l'objet serait d'attirer l'attention des étudiants sur leurs mauvaises préconceptions.

Nous pourrions également en imaginer une destinée aux physiciens, reprenant les différentes notions abordées par les mathématiciens durant leur travail de groupe, afin de combler l'inégalité.

II - 3.3 Conclusion

Nous avons décidé de scinder cette conclusion en trois parties : une concernant la mise en oeuvre de l'activité, une autre sur son contenu, et une dernière sur le travail de groupe des mathématiciens de première année. Rappelons que ces derniers, contrairement aux physiciens, ont pu approfondir le thème des séries au travers d'un travail de groupe proposé dans le cadre du cours d'*Analyse Réelle I.*

Les points abordés dans la section *L'évaluation de la séquence de cours* sont repris dans cette conclusion. Aussi, il est bon de se souvenir que :

- douze physiciens ont participé à l'activité, dix-huit non,
- treize mathématiciens ont participé à l'activité, huit non.

La différence entre le nombre d'étudiants ayant assisté ou non à l'introduction sur les séries résulte dans le fait que le tremplin est un temps de questions-réponses non obligatoire.

II - 3.3.1 Conclusions sur la mise en oeuvre de l'activité

Notre objectif de départ était de sensibiliser les premières années baccalauréat mathématique et physique aux difficultés survenant dans le chapitre des séries. Lors des deux activités, nous avons introduit ce sujet sur base de divers exemples, en mettant en évidence les liens avec les suites et en tenant compte des conceptions préalables des étudiants (sources des difficultés du chapitre).

Les étudiants n'ayant pas participé à notre activité semblent en général le regretter, étant donné l'aide dont ils auraient pu bénéficier pour comprendre le cours théorique (cfr section II - 3.1.1). La plupart justifie principalement leur absence pour incompatibilité d'horaire. Ainsi, dans l'objectif de réitérer l'activité, il est important de proposer un moment qui convient au plus grand nombre. Nous pourrions également sensibiliser les étudiants à l'utilité de ce dispositif.

Les participants sont d'ailleurs favorables à l'idée d'une prochaine édition. La plupart suggère de réaliser l'activité lors d'un tremplin, l'idée de l'intégrer à un TD ou au cours théorique ne rencontrant guère d'enthousiasme. Quelques-uns justifient cet entrain pour la séance en soulignant l'utilité des exemples concrets pour la compréhension des séries. Ils notent cependant quelques points à améliorer :

- donner deux heures d'activité,
- organiser une autre activité après le cours théorique,
- prévoir un moment d'institutionnalisation.

Puisque l'activité semble les avoir aidés, les étudiants trouvent utile qu'elle soit réitérée l'année ultérieure. Entre autres points appréciés par la quasi totalité des étudiants, citons une meilleure visualisation du concept de série, un raccrochage de la théorie à des exemples concrets ainsi qu'une distinction claire entre les notions de suites et de séries. Rechercher des solutions par eux-mêmes ayant également plu aux physiciens, il nous semble essentiel d'intégrer cette composante à une future mise en oeuvre du dispositif en programmant deux heures d'activité. Enfin, les réponses des étudiants ne permettant pas de déterminer la pertinence ou non de l'utilisation des suites de positions et de distances orientées dans notre introduction, nous ne pensons pas nécessaire de modifier le fil rouge de l'activité.

II - 3.3.2 Conclusions sur le contenu de l'activité

A la quatrième question de la section II - 3.1.2, malgré le peu de réponses de la part des étudiants ayant participé au tremplin, nous constatons qu'ils semblent avoir compris les difficultés se cachant derrière les sommes infinies (non associativité) et leur utilité (notation pour la série). De plus, nous remarquons une évolution positive par rapport aux étudiants qui ont répondu au premier questionnaire (2014) – beaucoup affirmaient en effet qu'un processus infini (une somme) engendrait un résultat infini, idée peu rencontrée dans le deuxième questionnaire.

En comparant les réponses des participants à l'activité et les celles des étudiants n'y ayant pas assisté, nous formulons les constatations suivantes :

- Tous les étudiants, qu'ils aient assisté ou non au tremplin, savent qu'un lien existe entre les séries et les suites. Les participants ont généralement affirmé que deux suites intervenaient dans la notion de série, comme étudié lors de l'activité. Les autres catégories de réponses (lien général, confusion entre les séries et sommes partielles, ambiguïté) sont essentiellement émises par les étudiants n'ayant pas assisté au tremplin. Ce constat nous permet dès lors de percevoir l'utilité de l'activité en ce qu'elle aide les étudiants à discerner tous les liens existants entre les différents concepts abordés.

• Malgré l'activité, certains mathématiciens inversent encore la thèse et l'hypothèse de la propriété suivante : si une série de terme général u_n converge, alors la suite (u_n) converge vers zéro. Manquant de temps, nous n'avons insisté sur cette propriété qu'à la fin du tremplin, ce qui pourrait expliquer que les étudiants ne l'aient pas intégrée.

• La quasi totalité des étudiants semblent avoir intégré le principe selon lequel une série converge si et seulement si la suite des sommes partielles converge, en particulier les participants à notre activité. Nous ne pouvons pas en dire de même pour tous les points abordés lors des deux séances. Dès lors, dans l'objectif d'apporter des améliorations et d'accorder plus d'importance à certaines parties, nous pourrions insister davantage sur les éléments suivants :

- les différences entre les séries et les suites de sommes partielles,
- une série converge si et seulement si la suite des sommes partielles converge,
- la convergence de la suite de terme général n'est pas toujours une condition nécessaire à la convergence de la série (elle ne l'est que lorsque la limite de la suite de terme général est de zéro).

II - 3.3.3 Conclusions sur le travail de groupe

Les étudiants affirment en général ne pas s'être servis de l'activité (suite des distances orientées et de positions) dans leur travail de groupe, en témoigne l'*Annexe E.* Aucun ne soutient cependant que l'exemple introductif de la séance est inutile.

En outre, notons que les réponses des étudiants lors du feedback vont parfois à l'encontre de celles observées dans le travail de groupe (*Annexe E*) : ils y utilisent des notions vues au cours théorique, alors que ce sont leurs préconceptions, et donc parfois des justifications contraires aux théories développées en cours, qui ressortent dans le feedback. Le changement de contrat didactique peut expliquer cette différence : ce dernier pousse les étudiants à utiliser les informations du cours théorique lors du travail de groupe, ce qui n'est pas le cas dans le feedback. Dès lors, ne faudrait-il pas privilégier plus de moments de questions-réponses afin de contrer les préconceptions erronées ?

Enfin, le travail de groupe aurait pu être bénéfique pour les physiciens (*Annexe E*). Ne serait-il pas ainsi judicieux de l'instaurer également dans leur section ou encore de leur proposer une activité centrée sur les concepts abordés par les mathématiciens dans le travail ?

Troisième partie

Conclusion et bibliographie

Conclusion

A travers ce mémoire nous avons pu mettre en lumière une manière de contrer des conceptions d'étudiants à propos de l'infini afin de viser l'apprentissage des séries. Nous avons conçu une ingénierie didactique à propos de cette thématique, en nous basant sur les quatre phases décrites par Michèle Artigue.

Après avoir réalisé une analyse à caractère épistémologique sur la notion d'infini, nous avons élaboré un questionnaire ayant pour objet de rendre compte des difficultés rencontrées par les étudiants de première année en mathématique ou physique de l'Université de Namur dans l'étude de ces concepts à l'heure actuelle. Cet exercice nous a permis de poser plusieurs constats : tout d'abord, certains étudiants ayant répondu au questionnaire ne semblent pas concevoir qu'un processus infini puisse engendrer un résultat fini. Ensuite, il s'avère que beaucoup éprouvent des difficultés à percevoir les liens existants entre les séries et les suites. En effet, il nous a semblé que trop peu d'importance était accordée au fait que dans la notion de série intervenaient deux suites (la suite des sommes partielles et la suite de terme général), ou encore, au fait que la convergence d'une série est déterminée par la convergence de la suite des sommes partielles. Enfin, l'inversion d'une thèse et d'une hypothèse d'une propriété relative aux séries constitue une erreur récurrente dans le chef des étudiants : ils ne savent pas si le fait que la suite de terme général converge vers zéro est une condition nécessaire ou suffisante de la convergence de la série.

Afin de remédier à ces difficultés, une activité introduisant les séries a été proposée aux étudiants. Telle que conçue dans l'*Annexe C*, elle est prévue en amont du cours sur les séries. Pour rendre plus attractive l'introduction de cette nouvelle matière, nous avons débuté notre dispositif par une activité relativement concrète, posée dans un cadre géométrique afin de favoriser une visualisation des deux suites qui interviennent dans la notion de série. Notons également qu'elle fut élaborée de manière à obtenir des étudiants des conjectures en lien avec les difficultés relevées dans le premier questionnaire. Ayant préalablement imaginé des exemples et contre-exemples validant ou non ces potentielles conjectures, nous avons pu les amener à constater par eux-mêmes la pertinence de leurs propos.

Remarquons que diverses contraintes ont été rencontrées avant l'expérimentation de notre activité, en conséquence de quoi, les étudiants ont été divisés en deux groupes : un composé de physiciens, un de mathématiciens. En outre, l'activité fut proposée lors d'une plage de tremplin, laissant ainsi les étudiants libres d'y assister. L'avantage de cette situation est qu'elle permet de comparer a posteriori la compréhension des séries des participants avec celle des autres.

Lors de la mise en oeuvre de notre activité, nous avons constaté que nous retrouvions les conceptions préalables des étudiants auxquelles nous nous attendions (par exemple, affirmer que la série converge si sa suite de terme général converge vers zéro). Ainsi, grâce aux exemples préalablement imaginés pour réfuter chaque conception erronée, les étudiants ont pu directement prendre conscience de leurs erreurs.

Par ailleurs, le feedback a permis de mettre en lumière que la compréhension des étudiants ne fut pas optimale. En effet, beaucoup, en particulier les mathématiciens, ont commis des erreurs en ce qui concerne l'utilisation d'une condition nécessaire mais non suffisante. Si cette faute est également présente dans les réponses des participants à l'activité, notons cependant que nombre d'entre-eux semblent avoir assimilé les autres concepts abordés, comme par exemple le fait que deux suites interviennent dans la notion de série. Remarquons qu'il parait normal que l'utilisation d'une activité plus concrète et dynamique qu'une introduction classique aux séries semble bénéfique à l'apprentissage de ces dernières. En effet, les étudiants ayant participé à l'animation ont obtenu, en général, de meilleurs résultats aux questions du feedback.

Perspectives

Dans l'objectif de réduire plus encore les erreurs commises par les étudiants, nous pourrions davantage insister sur les éléments suivants dans notre discours, ou à travers d'autres activités à proposer aux étudiants :

- les différences entre les séries et les suites de sommes partielles,
- une série converge si et seulement si la suite des sommes partielles converge,
- la convergence de la suite de terme général n'est pas toujours une condition nécessaire à la convergence de la série (elle ne l'est que lorsque la limite de la suite de terme général est de zéro),
- la signification de la somme infinie dans le contexte des séries.

Des améliorations peuvent également être apportées à l'organisation de l'activité en elle-même. En effet, même s'il s'avère que les étudiants sont favorables à réitérer ce type d'expérience, les suggestions suivantes sont les bienvenues :

- consacrer deux heures d'activité, la phase de recherche personnelle étant importante pour l'émergence des conjectures,
- proposer une autre activité après le cours théorique,
- prévoir un temps d'institutionnalisation.

Si, parmi ces propositions, il ne fallait en garder qu'une seule, nous conseillons le recours à la première. En effet, les physiciens ont particulièrement apprécié le temps qui leur a été laissé pour rechercher, en groupe, la solution au problème posé, contrairement aux mathématiciens qui ont justement regretté le peu de temps accordé à l'activité. Nous pensons que certaines de leurs erreurs rencontrées dans le feedback auraient ainsi pu être évitées.

Ainsi, les perspectives à venir pour ce travail consistent en l'application des changements sus-mentionnés. Nous pourrions également utiliser d'autres cadres que le géométrique ou encore d'autres suites que celles des distances orientées et des positions. En effet, les étudiants n'ont émis aucun engouement particulier à l'utilisation des deux suites précédemment citées (aucun problème non plus). Il pourrait également s'avérer intéressant de proposer aux physiciens une autre activité portant sur les concepts abordés lors du travail de groupe des mathématiciens afin que chaque section bénéficie des mêmes avantages. De fait, nous avons pu constater que certaines erreurs commises par les physiciens auraient pu être évitées s'ils avaient été conviés à se pencher sur les thèmes du travail de groupe des mathématiciens.

Bibliographie

Livres

[1] M. Artigue, *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, La Pensée Sauvage, Clermont-Ferrand, pp. 225-237, 2009.

[2] M. Artigue, *Recherches en Didactique des Mathématiques : l'ingénierie didactique*, Vol. 9, $n°3$, pp. 281-308, La Pensée Sauvage, Paris, 1988.

[3] J. D. Barrow, *Une brève histoire de l'infini*, $n°978 - 2 - 221 - 10926 - 7$, Robert Laffont, Paris, 2008.

[4] J. Baudet, *Nouvel abrégé d'histoire des mathématiques*, $n°2-7117-5316-6$, Vuibert, Paris, 2002.

[5] G. Brousseau : *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, RDM, Vol.4.2, pp. 164-198, 1983.

[6] G. Brousseau, *Théorie des situations didactiques*, $n°2 - 85919 - 134 - 8$, La pensée sauvage, Grenoble, 1998.

[7] N. Brousseau & G. Brousseau, *L'ingénierie didactique des mathématiques*, Université Victor Segalen Bordeaux 2, 2006.

[8] G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Journal de Crelle 84, p. 242-258, 1878 (Cantor [1932, p119-133]).

[9] G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen 46, p. 481-512 ; 49, p. 207-246, 1895-1897 (Cantor [1932, p282-356])

[10] E. Charlier, *Cours de Psychopédagogie*, Université de Namur, Namur, 2013-2014.

[11] Y. Chevallard & A.M. Joshua, *Un exemple de transposition didactique*, Vol. 3, $n°3$, La Pensée Sauvage, Paris, 1982.

[12] R. Douady, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Vol. 7, $n°2$, La Pensée Sauvage, Paris, 1986.

[13] R. Douady, *Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement*, $n°6$, Repères-IREM, 1992.

[14] P. Duplessis, *L'objet d'étude des didactiques et leurs trois heuristiques : épistémologique, psychologique et praxéologique*, IUFM des Pays de la Loire, Nantes, 2007.

[15] V. Henry, *Cours de didactique et épistémologie des mathématiques* , Université de Namur, Namur, 2014-2015.

[16] H. Munos née Goiran, *Mémoire : Changements de cadres et de registres*, I.U.F.M, Montpellier, 2001-2002.

[17] M. Romainville, *Cours de Psychopédagogie*, Université de Namur, Namur, 2013-2014.

[18] S. Thiry, *Initiation à la démarche mathématique*, Librairie des sciences, Namur, 2008-2009.

[19] J. Winkin, *Analyse Réelle I - Notes de cours*, Namur, pp. 10-48, 2014-2015.

[20] G. Zeroallazero, *Au-delà de toute limite*, $n°978 - 2 - 930161 - 07 - 5$, CREM a.s.b.l, Nivelles, 2009.

Sites internet

[21] A. Abdellaoui, *Calcul Infinitésimal*, disponible à l'adresse `http://brindesciences.pagesperso-orange.fr/Calcul%20Infini.htm`, consulté le 20 avril 2014.

[22] Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique, *Programme d'études du cours de : Mathématiques*, 2000, disponible à l'adresse `http://www.restode.cfwb.be/download/programmes/40-2000-240.pdf`, consulté le 12 septembre 2014.

[23] G. Brousseau, *Situation adidactique*, disponible à l'adresse `http://icar.univ-lyon2.fr/membres/krobinault/coursDDM/d%E9finitions4.pdf`, consulté le 2 septembre 2014.

[24] P. Etchecopar, *L'infini en mathématique*, disponible à l'adresse `http://pagesperso-systeme.lip6.fr/Jean-Francois.Perrot/inalco/Automates/linfini-en-mathematiques-h01012.pdf`, consulté le 8 mai 2014.

[25] X. Hubaut, *Séries de Taylor et de MacLaurin* , 2014, disponible à l'adresse `http://xavier.hubaut.info/coursmath/ana/taylor.htm`, consulté le 21 avril 2014.

[26] M. Leroy, *Théorie des ensembles : Introduction*, disponible à l'adresse http://spoirier.lautre.net/leroy/, 1996, consulté le 21 avril 2014.

[27] *Analyse a priori et a posteriori d'une séance*, disponible à l'adresse http://rosambert.creteil.iufm.fr/PE2/Analyse%20a%20priori%20et%20a%20posteriori.pdf, consulté le 17 février 2015.

[28] *Les variables didactiques*, disponible à l'adresse http://www4.ac-nancy-metz.fr/ien57yutz/IMG/pdf/Les_variables_didactiques_en_maths.pdf, consulté le 14 mars 2015.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A : Lectures diverses

1. A la maternelle et en primaire

Pour voir comment les notions d'infini, et d'espace en général, sont perçues par des élèves de maternelles et de primaires, penchons sur une première étude, réalisée en Italie, intitulée *Les différentes cultures des jeunes élèves à propos de l'espace (et de l'infini)* [13].

Elle a pour but d'observer les conceptions de l'espace (et d'infini en connexion avec l'espace) d'enfants âgés de 5 à 7 ans à travers le dessin. Les enfants reçoivent une série de motifs à reproduire sur une feuille de papier vierge. Selon les chercheurs, l'idée d'inifni est perçue chez l'élève s'il manifeste l'envie d'aller au-delà de la feuille pour continuer son dessin.

Cette étude, réalisée durant l'année scolaire 2001-2002, a impliqué :

– 28 enfants d'écoles maternelles (12 à Rivarolo del Re, 11 à Casalmaggiore),
– 20 enfants de premier primaire (de Rivarolo del Re),
– 36 de deuxième primaire (de Casalmaggiore) dont 13 d'origines non italienne.

Pour la suite de l'étude, les chercheurs se sont basés sur les productions de 79 enfants.

1.1 Avant l'expérience

Deux outils ont été utilisés pour réaliser cette expérience : une feuille vierge et une *sériation* (une suite de différents motifs). Ce terme recouvre deux significations différentes ([20], p. 244) :

1) *la reconnaissance de la loi de formation d'une suite dont ne sont donnés que quelques uns des premiers termes,*
2) *la construction d'une suite dans la cas où une loi de formation est donnée.*

Les chercheurs pensent, par le biais de cette expérience, déceler la perception qu'ont les enfants du concept d'infini, l'utilisation des séries le sous-tendant. Dans un souci de cohérence avec les recherches effectuées auparavant par le groupe de Recherche de leur université, les scientifiques supposent que :

– l'influence de la formation scolaire sur les enfants est négligeable, au vu de leurs âges,
– les croyances des enfants peuvent être groupées en deux approches : une Platonicienne et une Aristotélicienne.

Ces deux approches se basent sur deux conceptions différentes de l'espace : l'espace indépendant (approche Platonicienne) et le non indépendant (approche Aristotélicienne) [14].

---

13. Etude rélalisée par Carlo Marchini, Université de Parme, 2001-2002
14. Définit pas le mathématicien Fransceco Speranza (1932-1998).

Selon Platon, *l'espace indépendant est une espèce qui offre une place aux choses* ([20], p. 243). A l'inverse, Aristote parle d'espace non indépendant quil interprète comme *le lieu d'un corps, ce qui implique la finitude dans le sens de limitation* ([20], p. 243). Dans le cadre de cette expérience, un enfant aura, selon les chercheurs, une approche Platonicienne s'il manifeste l'envie d'aller au-delà de la feuille pour réaliser son dessin, une approche Aristotélicienne dans le cas contraire.

Choix d'une sériation à trois motifs

Au départ de leur expérimentation, les chercheurs se sont posés diverses questions : tout d'abord, comment parler de l'espace aux enfants. En effet, la question directe « qu'est ce que l'espace selon vous ? » ne pouvait être adressée à de si jeunes enfants. De plus, utiliser le mot « infini » dans les instructions données aux élèves aurait pu influencer leur comportement. Des termes tels que « continuer », « etc »,... ont été préférés. Une deuxième question concernait l'utilisation de la sériation : était-ce le meilleur outil pour cette étude ? Les chercheurs se sont également demandé s'il fallait-il prendre deux ou trois motifs ? Enfin, fallait-il vraiment utiliser une feuille vierge - le problème étant qu'elle fait allusion à une interprétation anisotropique de l'espace : elle peut être mise verticalement ou horizontalement ?

Malgré les difficultés rencontrées dans l'élaboration de l'expérience, l'étude fut entreprise et l'utilisation d'une sériation de trois motifs fut choisie. En effet, au début de leurs recherches, les scientifiques ont réalisé une expérience visant à déterminer si un module binaire était préférable à un module ternaire et inversémment. Les résultats de ce test ont été rassemblés dans le tableau 12.

Table 12 – Tableau récapitulatif des longueurs moyennes de modules binaires et ternaires pour chaque classe

Ecole	Nombre d'élèves	Nb. de sériations proposées (binaires ou ternaires)	Moy. des modules ternaires consécutifs réalisés	Moy. des modules binaires consécutifs réalisés
Maternelle de R.	11	15	6.66	0.37
Maternelle de C.	12	35	7.73	0.17
1ère primaire de R.	20	153	24.96	0
2e primaire de C.	36	133	15.47	7.83

La troisième colonne du tableau est obtenue en additionnant le nombre total de modules proposés dans chaque classe, qu'ils soient binaires ou ternaires, durant le déroulement de l'expérience. Les deux dernières colonnes montrent respectivement le nombre de modules ternaires/binaires qui ont été réalisés consécutivement.

Par ce premier tableau, les chercheurs ont pu que l'utilisation d'un module ternaire était préférable à un module binaire (dont la longueur moyenne est plus élevée). Ce choix implique une plus grande complexité puisqu'il faut à la fois déterminer la forme et la couleur à utiliser (démarche vers l'arrière) et le dessiner (démarche vers l'avant). Si un module binaire avait été choisi, les enfants auraient seulement dû faire attention à l'élément précédent et à sa couleur, ce qui était plus facile.

1.2. Expérience

L'expérience comporte deux étapes. La première, différente selon les classes, consiste à donner le modèle de départ : une sériation de trois motifs [15]. Dans les écoles maternelles et de première primaire, le professeur dessine lui-même les modules de départ. En deuxième primaire par contre, il fournit les instructions aux élèves pour qu'ils les construisent eux-mêmes.

Lors de la deuxième étape, l'enseignant demande aux élèves de répéter les modules donnés. Une fois qu'ils arrivent au de la feuille, la seule instruction que l'enseignant peut donner est « continue ». D'après les chercheurs, c'est là que le comportement des enfants permet de déterminer s'ils perçoivent une quelconque notion d'infini : comment vont-ils réagir lorsqu'ils se trouveront à la fin de la feuille ? Manifesteront-ils l'envie d'effectuer d'autres motifs et d'aller au-delà de la feuille ou s'arrêteront-ils là.

1.3. Résultats

Premier résutat

Un premier résultat montre les réussites des élèves lors de l'expérience. Entendons par « réussite des élèves » le faite qu'ils aient :

– reproduit la même séquence que celle proposée par l'enseignant,
– reproduit la même séquence à la suite de la séquence précédente,
– alterné les couleurs de la même façon que sur la séquence initiale.

TABLE 13 – Tableau représentant les réussites de l'expérience

Ecole	Nb. d'élèves	Nb. de sériations correctes pour l'ensemble des élèves	Nb. d'élèves qui réalisent au moins une sériation ternaire correcte
Maternelle de R.	11	7	5
Maternelle de C.	12	26	11
1ère primaire de R.	20	107	19
2e primaire de C.	36	99	36

Nous pouvons déduire du tableau 13, qui représente la capacité des élèves à reproduire correctement le module ternaire, que la tâche est correctement réalisée dès le plus jeune âge. Cependant, plus les enfants grandissent, plus la capacité à reproduire les modules augmente. Le dessin de Noemi à le FIGURE 2 donne un exemple de sériation correcte : l'élève a en effet continué le motif ternaire de départ (trois cercles) en alternant à chaque fois les bonnes couleurs.

15. Cfr *Annexe A* pour l'explication de ce choix.

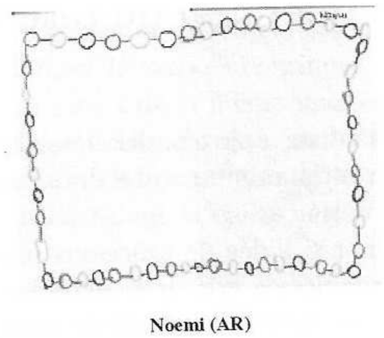


Figure 2 – Sériation correcte réalisée par Noemi

Deuxième résultat

Le deuxième résultat s'attarde sur le nombre de réalisations où l'espace a été perçu de façon Platonnicienne, Aristotélicienne, ou des deux façons. Pour C. Marchini, si le dessin de l'enfant présente une séquence terminée, l'enfant a alors une conception de l'espace Aristotélicienne. A l'inverse, si dans le dessin on perçoit une intention de continuer au-delà de la feuille - pouvant se manifester, par exemple, par de petits traits d'un côté ou l'autre de la séquence de motifs - l'enfant adopte alors une approche Platonicienne.

Table 14 – Tableau représentant les différentes conceptions de l'espace chez les enfants

Ecole	Nb. d'élèves	Nb. de perceptions mixtes	Nb. de perceptions Aristotéliciennes	Nb. de perceptions Platoniciennes
Maternelle de R.	11	0	7	4
Maternelle de C.	12	7	3	2
1ère primaire de R.	20	2	16	2
2e primaire de C.	36	7	21	8

En comparant les deux dernières colonnes du tableau 14, on constate que les enfants ont une approche plus Aristotélicienne que Platonicienne de l'espace. Le nombre de perceptions mixtes est quant à lui assez faible, sauf pour les élèves de maternelle de Casalmaggiore. Voyons à présent quelques exemples de réalisations :

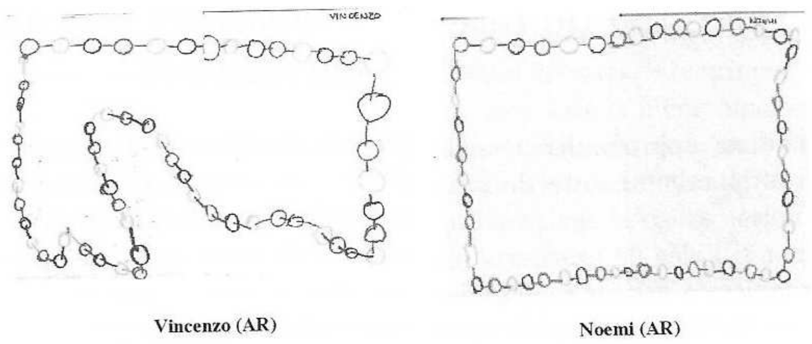


FIGURE 3 – Exemples de représentation Aristotélicienne de l'espace

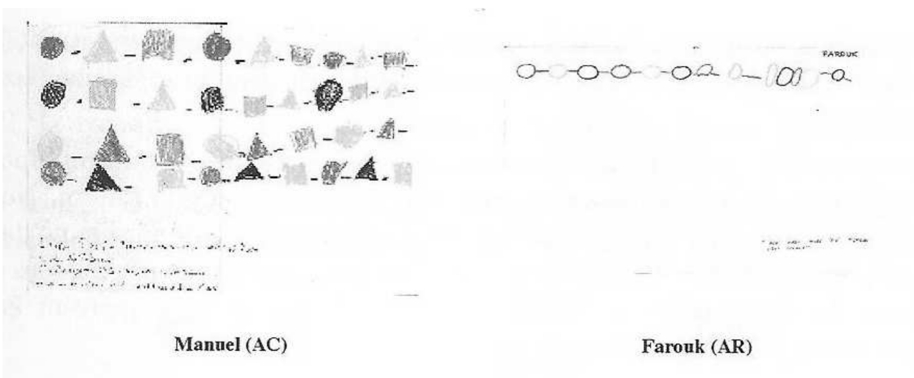


FIGURE 4 – Exemples de représentation Platonicienne de l'espace

Dans les deux premiers cas, on observe des séquences terminées : les élèves sont revenus à leur point de départ et aucune volonté d'aller au-delà de la feuille n'a été manifestée : Vincenzo et Noemi ont tous les deux une perception Aristotélicienne de l'espace. A l'inverse, les deux autres dessins expriment une volonté d'aller au delà de la feuille grâce aux petits traits de part et d'autre des motifs : Manuel et Farouk ont une représentation Platonicienne de l'espace.

1.4. Conclusion

En faisant resurgir les conceptions préalables des enfants sur la notion d'infini, cette expérience nous a permis d'observer différentes manifestations de l'espace et de l'infini, et ce dès l'école maternelle. L'approche Aristotélicienne domine dans la représentation qu'ont les enfants de l'espace. A leurs âges, ils ne perçoivent pas encore que le fait de « continuer » la séquence de motifs est un processus sans fin. En général, ils s'arrêtent à un « moment » sur leur feuille et ne manifestent pas le souhait de continuer les motifs au-delà du papier. Dès lors, l'étude démontre que peu d'enfants perçoivent l'idée de l'infini.

Critique

Il nous semble toutefois essentiel d'attirer l'attention sur deux limites de l'étude : d'une part, l'obstacle culturel empêchant l'enfant de continuer d'écrire sur le banc n'est pas pris en compte par les chercheurs alors qu'il peut influencer le comportement de l'élève. D'autre part, l'hypothèse selon laquelle on peut parler de la notion d'infini à travers l'espace est assez forte. Ces résultats doivent donc être considérés avec précaution.

2. En primaire et secondaire

Dans cette section, nous étudions comment la notion d'infini est perçue dans des écoles primaires et secondaires, par le biais d'une autre étude réalisée par le même groupe de chercheurs.

Le but de cette recherche est de *vérifier*, via la feuille d'énoncé de la section IV, *si l'idée de processus récursif infini est plus ou moins bien reconnue, de manière à arriver à identifier une suite convergente et/ou divergente, au départ de l'observation de quelques éléments figuratifs qui doivent être perçus comme des éléments de la suite elle-même* ([20] p. 246).

Cette étude, réalisée durant l'année scolaire 2001-2002, a impliqué :

- 36 élèves de quatrième primaire,
- 71 élèves de secondaire inférieur,
- 194 élèves de secondaires supérieurs.

2.1. Expérience

Soit la feuille d'énoncé suivante, les objectifs de cette question sont les suivants :

- vérifier si le procédé de construction est perçu comme infini,
- déterminer la prévalence de l'idée de suite convergente (le dessin n'est complété qu'avec des carrés de plus en plus petits) ou divergente (des carrés de plus en plus grands),
- détecter la présence de continuité (insertion d'autres carrés entre ceux déjà présents sur la fiche).

Continue le dessin en ajoutant de la même manière d'autres carrés.

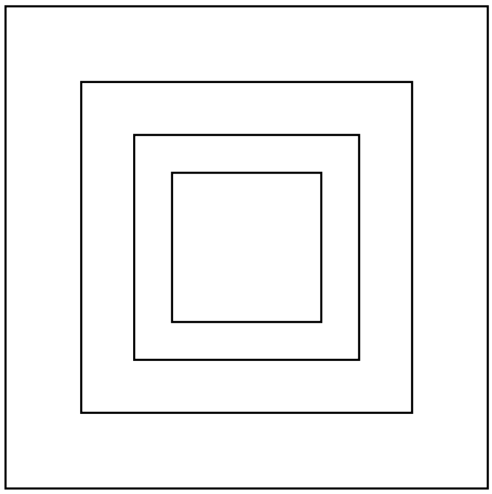


Figure 5 – Enoncé donné aux élèves de primaire(s) et secondaire(s)

2.2. Résultats

Premier résultat

Les chercheurs ont éprouvé des difficultés à déterminer si les élèves avaient perçu le processus comme infini : un des élèves n'a par exemple dessiné qu'un seul carré. Les membres du groupe se sont entendu pour affirmer qu'en général les élèves avaient perçu le processus comme infini.

Deuxième résultat

Le tableau 15, nous permet de déterminer la prévalence de l'idée de convergence ou de divergence lors de la réalisation de l'exercice.

TABLE 15 – Récaputilatif du nombre de réalisations où l'idée de convergence et/ou divergence est présente

	Convergence	Divergence	Les deux
Secondaire supérieur	40 (21%)	70 (36%)	76 (39%)
Secondaire inférieur	0	42 (59%)	27 (38%)
Primaire	0	28 (78%)	7 (19%)
Total	40 (13%)	140 (47%)	110 (37%)

Nous constatons que les élèves ont tendance à ajouter des carrés externes de plus en plus grands (cfr. le dessin de gauche de la FIGURE 6). En effet, aucun élève de primaire et de secondaire inférieur n'a complété le dessin en utilisant des carrés intérieurs. Se pose dès lors la question de savoir si, chez ces derniers, la notion d'infini ne fait référence qu'à ce qui est grand, et non pas à ce qui est petit - remarquons également qu'avec l'âge, la combinaison des idées de convergence et de divergence se développe chez les élèves. En secondaire supérieur, c'est même à l'ajout de carrés à la fois internes et externes aux carrés de départ auquel les élèves ont le plus pensé (cfr. le dessin de droite de la FIGURE 6).

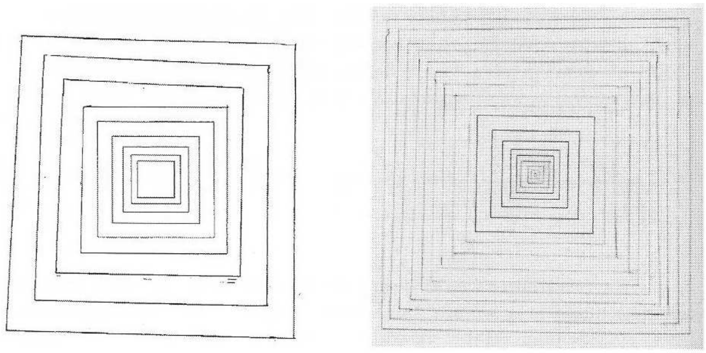


FIGURE 6 – Exemples de réalisations d'élèves sur la convergence et/ou divergence

Troisième résultat

Finalement, les chercheurs ont rassemblé les dessins qu'ils considéraient comme possédant une idée de continuité. Le tableau 16 révèle que l'idée de continuité est peu présente chez les élèves (environ 9 % du total des élèves).

TABLE 16 – Nombres de réalisations où une idée de continuité est observée

Classe	Continuité
Secondaire supérieur	19(10%)
Secondaire inférieur	7(10%)
Primaire	1(3%)

Selon les chercheurs, l'idée de continuité s'exprime lorsque les élèves insèrent des carrés entre ceux qui sont déjà présents sur le dessin. La FIGURE 7 illustre ce type de dessin.

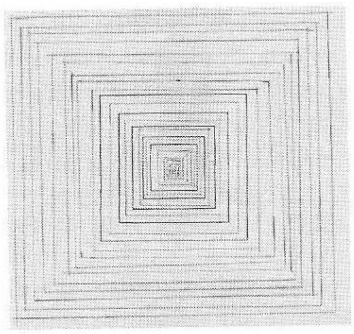


FIGURE 7 – Exemple de réalisation où l'idée de continuité est présente

2.4. Conclusion

Les chercheurs ont conclu de cette expérience que la notion d'infini via les idées de convergence (pour l'infiniment petit) et de divergence (pour l'infiniment grand) est présente dès l'école primaire. Cependant, la plupart des élèves pensent plus à continuer le dessin en ajoutant des carrés de plus en plus grand, ce qui veut dire que la notion de divergence est plus marquée que celle de convergence. Les élèves ont plus tendance à penser à l'infiniment grand. Malgré tout, ils observent qu'avec l'âge, les jeunes ont tendance à réaliser le dessin avec les deux notions. Par contre, la notion de continuité (par l'insertion de carrés intermédiaires parmi les carrés déjà présents) semble quasi inexistante.

Critique

Une critique pourrait être faite quant aux conclusions tirées par les chercheurs. En effet, les résultats auraient pu être totalement différents selon la disposition des carrés de départ. Dans le cas ici présent, de grands espaces ont été laissés à l'extérieur des carrés dejà proposés. Si cet espace avait été plus petit, il se peut que les élèves aient ajouté plus de carrés à l'intérieur du dessin de départ qu'à l'extérieur. Ces résultats doivent donc être considérés avec précaution.

Annexe B : Questionnaire juin 2014

Question 1 : Réflexion

1. Si vous deviez expliquer ce qu'est *l'infini*, que diriez-vous ?

2. Si vous deviez associer des mots à celui du mot *infini*, quels seraient-ils selon vous ?

3. Si vous deviez expliquer ce qu'est une *limite*, que diriez-vous ?

4. La notion de limite est-elle, selon vous, liée à la notion d'infini ? Si oui, expliquez.

5. Si vous deviez expliquer ce qu'est un *ensemble infini*, que diriez-vous ?

6. Si vous deviez expliquer ce qu'est un *ensemble infini dénombrable*, que diriez-vous ?

7. Si vous deviez expliquer ce qu'est un *ensemble infini non dénombrable*, que diriez-vous ?

8. Pouvez vous donner des exemples d'ensembles infinis dénombrables et non dénombrables ?

Question 2 : Le paradoxe de Zénon

Pour qu'une flèche atteigne sa cible, celle-ci doit parcourir la distance qui la sépare de la cible. Lorsqu'une flèche en mouvement parcourt un certain trajet, il faut qu'elle parcourt d'abord la moitié de ce trajet, et après encore, la moitié de cette moitié et ainsi de suite. Ce processus de division du parcours de la flèche est donc infini. On peut donc en conclure que le procédé n'a jamais de fin et donc, que la flèche n'atteindra jamais sa cible.

1. Que penses-tu du raisonnement de Zénon ? Te semble-t-il correct ? Si oui, pourquoi ? Si non, développe ton raisonnement.

2. Que penses-tu de la conclusion de Zénon ? Te semble-t-elle correcte ? Si oui, pourquoi ? Si non, développe ton raisonnement.

Question 3 : Nombres réels

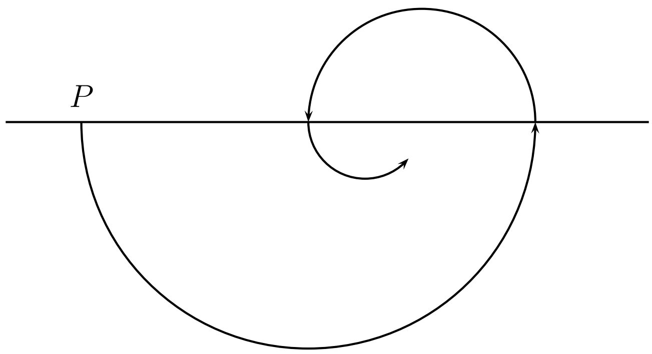
1. Selon vous, peut-on dire que $1,999999\cdots$ est égal à deux ?

2. Selon vous, quel est le résultat de la soustraction suivante : $1,999999\cdots - 0,999999\cdots$?

Expliquez votre raisonnement.

Question 4 : Une étrange spirale

D'un point de départ P d'abcisse 0, on suit une demi-circonférence de **rayon 1**, puis on suit une demi-circonférence de rayon $\frac{1}{2}$ (voyez le dessin). Et ainsi de suite, on parcourt des demi-circonférences de rayon égal chaque fois à la moitié du rayon de la demi-circonférence précédente.



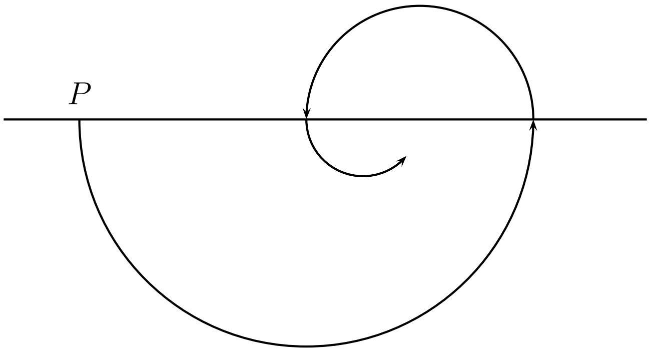
1. **Ce processus permet-il d'arriver à un point final ? Si oui, à quelle distance du point de départ P, sur l'axe, pourrait-il se trouver ?**

2. **Quelle sera la longueur du chemin parcouru sur les demi-circonférences ?**

Annexe C : Questions du tremplin

Question 1 : Une étrange spirale

D'un point de départ P d'abcisse 0, on suit une demi-circonférence de **rayon 1**, puis on suit une demi-circonférence de rayon $\frac{1}{2}$ (voyez le dessin) et ainsi de suite jusqu'à former autant de demi-circonférences que voulues. Chacune d'entre-elles a donc un rayon égal à la moitié de la demi-circonférence précédente.



Peut-on situer le point d'arrivée pour les demi-circonférence(s) suivantes ? Si oui, quelle est la position de ce point pour chacune des demi-circonférences ?

Nombre de demi-circonférence(s)	Existence	Position
1		
2		
3		
4		
5		
8		
10		
50		
100		
n		
et si on ne s'arrête pas ?		

Question 2 : Achille et la tortue

Achille et une tortue décident de faire une course. On suppose qu'Achille est dix fois plus rapide que la tortue et que chacun court à vitesse constante. Certain de gagner, Achille laisse 1000 mètres d'avance à son adversaire au temps t=0. Pendant une unité de temps, Achille parcourt 1000 mètres alors que la tortue en fait 100. Ainsi :

Etape	Au temps t=...	Distance séparant Achille du point de départ	Distance séparant la tortue du point de départ
0	t=0	0m	1000m
1	t=1	1000m	1000+100=1100m
1	t=1+$\frac{1}{10}$	1000+100=1100m	1100+10=1110m
2	t=1+$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$	1100+10=1110m	1110+1=1111m
...	...	...	...

Le temps qu'il faut à Achille pour rattraper la tortue peut se traduire par l'égalité suivante :

$$T = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$$

Zénon d'Elée, philosophe grec, affirmait que ce temps T ne pouvait être qu'infini.
Qu'en pensez-vous ?

Annexe D : Questions du feedback du tremplin

1) Pour tous

1. Es-tu : mathématicien/physicien ?

2. *Il n'existe aucun lien entre les suites et les séries.* Vrai ou faux ?
   Explique.

3. *Un processus infini ne peut qu'engendrer un résultat infini.*
   Vrai ou faux ? Explique.

4. Une série convergente a ⊙ *toujours* son terme général qui tend vers 0.
   ⊙ *parfois*
   ⊙ *jamais*
   ⊙ *autre ?*
   Explique.

5. Une série converge si ⊙ *la suite de terme général converge.*
   ⊙ *la suite des sommes partielles converge*
   ⊙ *autre ?*
   Explique.

2) Pour ceux qui n'ont pas assisté au tremplin introduisant les séries proposé par H. Cochart :

1. Quelles en sont les raisons ?
   ⊙ Pas intéressé(e)
   ⊙ Horaire incompatible
   ⊙ Je comprends déjà le cours habituel, je n'ai pas besoin d'aide
   ⊙ Je ne comprendrai de toute façon rien
   ⊙ Autres ...

2. Aurais-tu aimé y assister ? Pourquoi ?

3) Pour ceux qui ont assisté au tremplin introduisant les séries proposé par H. Cochart :

1. Penses-tu que cela t'a aidé à mieux comprendre le concept de série ? Pourquoi ?

2. L'activité introduisant les notions de position et de distance non-orientée t'a-t-elle aidé(e) à comprendre le concept de série lors du cours théorique ? Si c'est le cas, en quoi t'a-t-elle été utile ?

3. [Pour les mathématiciens] : L'activité introduisant les notions de position et de distance non-orientée t'a-t-elle aidé(e) à comprendre le concept de série lors du travail de groupe ? Si c'est le cas, en quoi t'a-t-elle été utile ?

4. Lors de ce tremplin, nous avons abordé différents thèmes. L'un d'entre-eux portait sur les sommes infinies. Qu'en as-tu retenu ? Qu'en penses-tu ?

5. Penses-tu que cette activité devrait être réitérée les années suivantes ? Explique.

6. Si c'est le cas, quelle est, selon toi, la meilleure place pour proposer cette activité ?
   ⊙ Au cours théorique ?
   ⊙ En TD ?
   ⊙ En tremplin ?
   ⊙ Lors du travail de groupe (pour les mathématiciens) ?

7. Si on décide de réitérer cette activité l'année prochaine, que faudrait-il améliorer selon toi ?

Annexe E : Commentaires sur le travail de groupe

1. Réponses du travail de groupe :

Dans les réponses de ces travaux, nous ne retrouvons aucune trace des éléments utilisés lors de notre activité pour illustrer les séries : suite de positions et suite de distances orientées. Pourtant, remarquons que la première question du travail de groupe porte sur un des paradoxes de Zénon :

> **Question 1**
>
> « *Le mouvement n'est qu'illusion. . .* »
> Achille, coureur grec réputé pour sa grande vitesse entame une course avec une tortue. Dans sa grande bonté, Achille laisse une longueur d'avance de 1 km à celle-ci. Selon Zénon, philosophe grec, Achille ne rattrapera jamais la tortue. Illustrez ce paradoxe à l'aide de la notion de série et prouvez que Zénon a tort.

Les étudiants peuvent résoudre ce problème de la même manière que pour la spirale. Ils avaient même une question similaire en tremplin (non vue pour cause de temps).

Dans ce travail, les étudiants ont rencontré des questions concernant la non associativité des sommes infinies (thème abordé lors du tremplin). Pourtant, peu nombreux sont ceux qui nous ont évoqué cela lors du feedback, le travail de groupe ayant pourtant eu lieu avant notre questionnaire. De même, beaucoup ont utilisé la propriété suivante dans leur travail de groupe :

Propriété 7. *Si une série de terme général u_n converge*
Alors la suite (u_n) converge vers zéro.

Nous l'avions également utilisé dans le tremplin. Pourtant, dans le questionnaire, certain étudiants ont encore inversé la thèse et l'hypothèse.

On peut donc en conclure que les étudiants ne semblent pas faire les liens entre ce qu'ils voient en tremplin, au cours théoriques, durant les exercices et lors de leurs travaux de groupe.

2. Influence du travail de groupe dans notre questionnaire :

Il se peut que le travail ait eu une influence négative sur les réponses données par les étudiants – en tout cas, sur l'inversion de la thèse et de l'hypothèse de la proposition citée précédemment. En effet, une des questions du travail de groupe portait sur le critère de Leibniz :

Si une suite à termes positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers zéro, alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ est convergente.

Il suffit que les étudiants aient retenu ce critère de façon plus général tout en oubliant certaines hypothèses pour ainsi se dire que

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro, alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente.

ce qui expliquerait les réponses des étudiants données lors du feedback. Cette supposition est bien entendue très forte, mais elle s'est peut être réellement produite.

Par contre, il est possible que le travail de groupe ait également eu une influence positive. Reprenons la deuxième question du travail, portant sur l'étude de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^k}$ (avec $n \in \mathbb{N}_0$, et avec $k \leq 1$, $k = 2$ ou $k \geq 3$). Les réponses de deux physiciens,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1$$

auraient peut être été différentes si ces derniers avaient participé à ce travail. Faut-il dès lors l'instaurer pour eux aussi ? Ou en tout cas, pourquoi pas leur proposer un tremplin sur les concepts abordées par les mathématiciens dans le travail afin que tout le monde bénéficie des mêmes avantages ?